
Lars Hoegen

John Stuart Mills induktive Beweise

Hausarbeit zum gleichnamigen Referat am 9. Mai 2005 im Rahmen des Seminars „Der mathematische Beweis“ unter der Leitung von Herrn apl. Prof. Dr. phil. Wilhelm Büttemeyer, gehalten im Sommersemester 2005 an der Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg

Lars Hoegen, Feldahornweg 60, 26127 Oldenburg
Telefon: 0441/3404647
E-Mail: lars.hoegen@mail.uni-oldenburg.de
achtes Fachsemester, Matrikelnummer 7963140

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Biographie	1
3	Induktive und Deduktive Logik	2
4	Mills Auffassung der Geometrie und der Arithmetik	4
4.1	Geometrie	5
4.2	Arithmetik	8
5	Mills Überlegungen zur Begründung mathematischer Sätze	11
6	Freges Krtitik an Mills Sichtweise	13
	Literatur	15

1 Einleitung

JOHN STUART MILL entwarf Mitte des 19. Jahrhunderts in seinem Buch *A System Of Logic, Ratiocinative and Inductive* [Mill 1843] ein System der deduktiven und induktiven Logik – so auch der Titel der deutschen Übersetzung [Mill 1885]. Eine seiner darin entwickelten Thesen ist, dass alle deduktiven Wissenschaften im Kern tatsächlich induktiv sind.

In dieser Hausarbeit möchte ich versuchen, im Anschluss an einige Bemerkungen zu seiner Biographie, Mills Überlegungen zu deduktiver und induktiver Logik, seine Auffassung von Geometrie, Arithmetik und dem darauf fußenden Zahlbegriff zusammen zu fassen. Abschließend werde ich noch kurz auf die Kritik eingehen, die Mills Zeitgenosse GOTTLIEB FREGE zu seinen Thesen äußert.

2 Biographie

JOHN STUART MILL wird am 20. Mai 1806 in London als Sohn des schottischen Philosophen JAMES MILL geboren. Sein Vater versuchte, ihm eine möglichst umfangreiche Erziehung zuteil werden zu lassen. So beschäftigte Mill sich bereits im Alter von 12 Jahren das erste Mal mit Logik, Volkswirtschaft, Metaphysik und Ethik.

Sein Vater machte ihn mit dem radikalen Liberalismus von JEREMY BENTHAM bekannt. Bentham wird dem Utilitarismus zugerechnet, der sich unter anderem zum Ziel gesetzt hat, das größtmögliche Wohlergehen für die größtmögliche Zahl von Menschen zu sichern. In den Jahren 1822 und 1823 ist Mill Mitglied der *Utilitarian Society*. Er entwickelt die Ideen Benthams weiter.

1820 beginnt er das Studium des römischen Rechts. Zwischen 1823 und 1858 ist er für das britische *Indian House* tätig; beginnend als Junior Clerk mit relativ bescheidenem Gehalt (30 Pfund per anno) steigt er stetig auf bis zum Chef des Examiner's Office, was ihm mit einem Jahresgehalt von etwa 2000 Pfund wirtschaftlich absichert. Im Jahre 1858 wird das *Indian House* aufgelöst, Mill wird bei einem Gehalt von 1500 Pfund pensioniert.

Zwischen 1824 und 1828 ist er das erste Mal als journalistischer Mitarbeiter für verschiedene Zeitungen und Zeitschriften tätig. 1826 erleidet er einen Nervenzusammenbruch. Während des langen Genesungsprozesses beeinflusst die Lektüre einiger Werke von COLERIDGE, COMTE, WORDSWORTH und SMITH seine geistige Entwicklung nachhaltig. Zwischen 1826 und 1829 ist er führendes Mitglied der *Speculative Society*, eines angesehenen Debattierklubs.

Zwischen 1831 und 1840 durchläuft Mill seine zweite Phase verstärkter journalistischer Tätigkeit. Ab 1835 gibt er die *London Review* heraus, die er ein Jahr später mit der *Wesminster Review* vereinigt. Ab 1837 ist er Eigentümer der fusionierten Zeitschrift und versucht, mit ihr die Politik zu beeinflussen. Eine erneute Erkrankung im Jahr 1839 führt

dazu, dass das Erscheinen der Zeitung schon 1840 eingestellt wird. Mill konzentriert sich auf die Veröffentlichung von Büchern, die teilweise auf seinen Artikeln und Essays beruhen.

In den Jahren 1841 bis 1846 unterhält Mill eine Korrespondenz mit AUGUSTE COMTE. In dieser Zeit erscheinen einige seiner Hauptwerke, u.a. das dieser Arbeit zugrunde liegende *A System Of Logic, Ratiocinative and Inductive* [Mill 1843], aber auch *Principles of Political Economy* [Mill 1873], in der er seine Überlegungen zur politischen Ökonomie darlegt. Politische Fragen beschäftigen ihn auch weiterhin; er veröffentlicht Werke, die den Freiheitsgedanken und den Utilitarismus [Mill 1864] thematisieren. Zudem kämpfte er als einer der ersten für die Emanzipation der Frau, was an seinem 1869 veröffentlichten Werk *The Subjection of Women* [Mill 1869] deutlich wird.

1851 heiratet er die Witwe HARRIET TAYLOR, die er bereits 1830 kennen lernte. Sie stirbt 1858 während einer Europareise in Avignon. Seit dieser Zeit wohnt Mill halbjährlich in Avignon und halbjährlich in Blackheath bei London.

1865 wird er im Wahlbezirk Westminster ins Unterhaus gewählt, dem er bis 1868 angehörte. 1867 wird er Rektor der University St. Andrews. Mill stirbt am 3. Mai 1873 in Avignon, im gleichen Jahr erscheint noch seine Autobiographie.

3 Induktive und Deduktive Logik

Um Mills Auffassung von Induktion und Deduktion zu verstehen, ist es notwendig, zunächst einmal die von ihm verwendeten Begriffe *Satz* und *Definition* sowie die Methode des *Schließens* zu betrachten.

Jede Aussage ist in einen *Satz* gekleidet. Mill analysiert Sätze nach ihren funktionalen Elementen:

„...jeder Satz sagt aus, daß ein gegebenes Subject ein Attribut besitzt oder nicht besitzt, oder daß ein Attribut (entweder bei allen oder bei einem Theile der Subjecte, bei denen man es antrifft) mit einem anderen Attribut verbunden ist oder nicht ist.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 1, S. 182]

Ihn interessiert dabei also der Gehalt eines Satzes, der sich aus der Analyse seiner Teile ergibt. Sätze beziehen sich dabei immer auf formulierbare Tatsachen oder Angaben. Er unterteilt Sätze in zwei Kategorien: worderklärende und sacherklärende.

Worterklärende Sätze nennt Mill *Definitionen*; es sind Aussagen, die die Bedeutung von Worten betreffen. Sie haben die Besonderheit, nicht beweisbar zu sein:

„...allein da die Bedeutung von Worten wesentlich willkürlich ist, so kann diese Classe von Aussagen weder wahr noch falsch sein und sie lassen deshalb weder den Beweis der Wahrheit noch jenen der Unwahrheit zu.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 1, S. 181]

Sacherklärende Sätze haben einen Wahrheitsgehalt, der mit der Methode des *Schließens* nachgewiesen bzw. widerlegt werden kann:

„Die meisten von den Sätzen, die wir für wahr halten, [...] halten wir nicht aufgrund ihrer eigenen Evidenz für wahr, sondern auf Grund von etwas früher Anerkanntem, aus denen wir die, wie der übliche Ausdruck lautet, folgern. Einen Satz aus einem früheren Satze oder Sätzen folgern, ihm Glauben schenken oder Glauben für ihn in Anspruch nehmen als für eine Folgerung aus etwas Anderem, heißt schließen im umfassenden Sinne des Wortes.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 1, S. 182]

Das Schließen stützt sich also auf den nachgewiesenen Wahrheitsgehalt früherer Sätze. Mill weist darauf hin, dass ein Schluss nur dann ein echter Schluss ist, wenn der Satz, auf den geschlossen wird, tatsächlich eine neue Aussage enthält. An einigen Gegenbeispielen erläutert er falsche Schlüsse, die eine bloße Wiederholung der Aussage des zugrunde liegenden Satzes in anderer Form beinhalten. Für ihn hat das Erkennen solch falscher Schlüsse eine große Bedeutung:

„Denn obgleich nicht das ein Folgern oder Schließen heißen kann, was eine bloße in andere Worte gefasste Wiederholung von bereits Ausgesagtem ist, so gibt es doch keine Wichtigere intellektuelle Gewohnheit und keine, deren Uebung strenger in das Gebiet der Logik fällt als die, rasch und sicher die Identität einer Aussage trotz der Verschiedenheit der sprachlichen Einkleidung zu erkennen.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 1, S. 186]

Nach diesen einleitenden Worten erklärt Mill, was er unter Induktion und Deduktion versteht. Abzielend auf seine in den nachfolgenden Kapiteln erläuterten Annahmen zur Natur der Wissenschaften erklärt er den Unterschied mehrfach in direkter Abfolge und bewertet die Induktion anschließend als die bessere Methode:

„Schließen in dem umfassenden Sinne, in dem ich das Wort gebrauche und in dem es gleichbedeutend mit Folgern ist, zerfällt nach der gewöhnlichen Ansicht in zwei Arten: Schließen von Besonderem auf Allgemeines, und Schließen von Allgemeinem auf Besonderes; die erste Art heißt Induction, die letztere Schlußfolgerung oder Syllogismus. [...]

Die Bedeutung dieser Ausdrücke ist die, daß die Induction das Erschließen eines Satzes aus Sätzen ist, die weniger allgemein sind als er selbst, die Schlußfolgerung hingegen als das Erschließen eines Satzes aus Sätzen, die gleich allgemein oder allgemeiner sind. [...] Wenn mit einem Worte der Schlußsatz allgemeiner als der weiteste der Vordersätze ist, so nennt man den Vorgang gemeiniglich den der Induction; wenn er weniger allgemein oder gleich allgemein ist, so ist es eine Schlußfolgerung.[...]

Bei jeder Induction schreiten wir von Wahrheiten, die wir kannten, zu Wahrheiten, die wir nicht kannten, von Thatsachen, die durch Beobachtung festgestellt sind, zu Thatsachen, die wir nicht beobachtet haben, und selbst zu Thatsachen, die wir jetzt gar nicht beobachten können – zu zukünftigen Thatsachen z.B. –, die wir aber keinen Anstand nehmen, lediglich auf Grund der Induktion selbst für wahr zu halten.

Die Induction ist daher ein wirkliches Verfahren der Schließens oder Folgerns.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 1, S. 187ff.]

4 Mills Auffassung der Geometrie und der Arithmetik

Den weiteren Verlauf seiner Überlegungen in Bezug auf die Mathematik fasst RESNIK wie folgt zusammen:

„...mathematics is known inductively from experience. Mathematical reasoning—indeed, all so-called deductive reasoning—is really inductive. The general axioms of mathematics are inductions derived from experience, and its existential postulates assert matters of physical fact.“

[Resnik 1980, S. 137]

Mill sagt dies natürlich nicht direkt gleich zu Anfang seiner Überlegungen; er analysiert zunächst die Grundlagen von Geometrie und Arithmetik und beschäftigt sich dann mit mathematischen Beweisen.

Zu Beginn des vierten Kapitels im zweiten Buch von *Ein System der deduktiven und induktiven Logik* [Mill 1885, S. 242] geht Mill auf Schlußketten als aus seiner Sicht wesentliches Kennzeichen deduktiven Vorgehens in den Wissenschaften ein. Im vorangehenden dritten Kapitel analysiert er die Funktion von Syllogismen aus logischer Sicht und zerlegt diese in Ober- und Untersätze. Der Obersatz enthält dabei die Aussage darüber, was gefolgert wird, während der Untersatz die Begründung dafür liefert, indem darin Ähnlichkeiten zwischen schon bekannten Fällen und dem neuen Fall dargelegt werden. Nun greift er dies auf und sagt, dass sich die deduktiven Wissenschaften allein daraus motivieren, dass diese Ähnlichkeiten nicht immer direkt erkennbar sind und man sie daher über Schlußketten nachweisen muss:

„...wenn die Aehnlichkeit, die der Untersatz aussagt, sinnfällig wäre, wie in dem Satze: Sokrates ist ein Mensch, oder sich doch sofort durch unmittelbare Beobachtung ermitteln ließe, so wäre keine Nothwendigkeit zu Schlußketten vorhanden, und es gäbe keine deductiven Wissenschaften. Schlußketten gibt es nur zu dem Behufe, um eine Induction, die, wie dies bei allen Inductionen der Fall sein muß, auf beobachteten Fällen beruht, auf solche Fälle auszudehnen, in denen wir nicht nur die Thatsache,

sondern auch das Merkmal, durch welches sie bewiesen werden soll, nicht unmittelbar beobachten können.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 4, S. 242]

Mill ist also der Meinung, dass sich nahezu alle Deduktionen auf Induktionen zurückführen lassen. Er belegt dies an verschiedenen Beispielen von Aussagen, die aus Schlußketten bestehen und weist jedesmal nach, dass sie sich aus einer Reihe von Induktionen zusammensetzen, die man mehr oder weniger stillschweigend voraussetzt. Aus seinen Beispielen und den dazu gemachten Erläuterungen geht auch hervor, dass er sich der Komplexität der Zerlegung einer Schlußkette in die grundlegenden Induktionen bewusst ist. Es kann unter Umständen „...einer Schlußkette jeder beliebigen Länge bedürfen, um einen einzelnen Fall in den Bereich einer Induction zu bringen [...]“. [Mill 1885, Buch 2, Kap. 4, S. 247]

4.1 Geometrie

Mill wendet diese Sichtweise auch auf die Geometrie an. Er diskutiert einleitend einen Beweis des fünften Lehrsatzes von EUKLID¹, den er ausschließlich mit Hilfe der Axiome über Gleichheit und Ungleichheit von Größen beweist. Das Gedankengebäude der Geometrie stützt sich auf diese Axiome, alle anderen Schlüsse werden daraus deduktiv gezogen, daher betrachtet Mill die Geometrie insgesamt als deduktive Wissenschaft:

„Alle Inductionen sind in jenen einfachen Inductionen enthalten, deren einfache Formeln die Axiomen und einige wenige der sogenannten Definitionen sind. Der Rest der Wissenschaft besteht aus den Verfahrungsweisen, um unvorhergesehene Fälle unter diese Inductionen zu bringen [...]. In jenen Definitionen und Axiomen ist die Gesamtheit der Merkmale aufgestellt, durch welche es, vermöge einer kunstvollen Zusammenstellung derselben, möglich wurde, alles das zu entdecken und zu beweisen, was in der Geometrie bewiesen ist. Da der Merkmale so wenige, und da die Inductionen, aus denen sie hervorgehen, so naheliegend und gewöhnlich sind, so macht die Verbindung mehrerer derselben, welche Deductionen oder Schlußketten bildet, die ganze Schwierigkeit der Wissenschaft und [...] ihren ganzen Umfang aus, und daher ist die Geometrie eine deductive Wissenschaft.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 4, S. 252]

Bleibt noch die Frage zu klären, woher die Axiome kommen. Mill deutet im letztgenannten Zitat bereits an, dass die Axiome induktiver Natur seien. Er glaubt, die Axiome auf Beobachtung und Experiment beruhen und nimmt damit eine Gegenposition zur Kantschen Philosophie ein, die annimmt, die Axiome seien a priori bekannt. Im fünften Kapitel des zweiten Buches sagt er dazu:

¹In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis gleich.

„...welches ist der Grund unseres Glaubens an die Wahrheit der Axiome, – welches ist die Evidenz, auf der sie beruhen? Ich antworte: sie sind Erfahrungs-Wahrheiten, – Verallgemeinerungen, die wir aus unserer Beobachtung abziehen. Der Satz: zwei gerade Linien, die einmal zusammengetroffen sind, treffen nicht wieder zusammen, sondern gehen immer weiter auseinander, ist eine Induction aus der Evidenz unserer Wahrnehmung.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 5, S. 267]

Dies geht mit seiner Auffassung von Definitionen konform. Er ist der Ansicht, daß Definitionen implizit auch eine Existenzbehauptung enthalten. So beinhaltet, Mill zufolge, die Definition der Figur Kreis, daß eine solche tatsächlich in der empirischen Welt existiert:

„...Definitionen, im geometrischen, nicht im logischen Sinne: Sätze, die nicht nur die Bedeutung eines Ausdrucks, sondern zugleich auch die beobachtete Thatsache aussagen. Den Satz: „ein Kreis ist eine Figur, die von einer Linie begrenzt wird, deren Punkte alle gleich weit von einem Punkte innerhalb der derselben entfernt sind, nennt man die Definition eines Kreises; aber der Satz, der an Folgerungen so reich ist, und der in Wahrheit ein letzter Grundsatz der Geometrie ist, ist der, daß es Figuren, die dieser Behauptung tatsächlich entsprechen, wirklich gibt.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 299]

Diese Darstellung ist sicherlich leicht anzweifelbar, da es in unserer alltäglichen Anschauung keine unendlich dünnen Linien und Punkte ohne Ausdehnung gibt, auf die die Axiome Bezug nehmen. Mill trägt dem Rechnung, indem er behauptet, dass es in der menschlichen Vorstellung keine Punkte oder Linien im mathematischen Sinne gibt, sondern dass jeder Mensch nur Abbilder von realen Punkten, Kreisen oder Linien im Sinn hat. Er erkennt allerdings, dass der menschliche Geist eine Fähigkeit zur Verallgemeinerung hat, die hier zum Tragen kommt. Demzufolge sind die Linien und Punkte in den euklidischen Axiomen und Definitionen nur Approximationen wirklicher Linien und Punkte, die auf das mathematisch notwendige reduziert werden:

„Da es also weder in der Außenwelt noch im menschlichen Geiste irgendwelche Gegenstände gibt, die den Definitionen der Geometrie völlig entsprechen, während man doch annehmen kann, daß es jene Wissenschaft mit Nichtseiendem zu thun hat, bleibt nichts anderes übrig, als zu denken, daß es die Geometrie mit solchen Winkeln, Linien und Figuren zu thun hat, wie sie in der Wirklichkeit vorhanden sind; und die Definitionen, wie man sie nennt, muß man als einige unserer frühesten und nächstliegenden Verallgemeinerungen in Betreff jener natürlichen Gegenstände betrachten. Die Correctheit dieser Verallgemeinerungen als solcher ist makellos; die Gleichheit aller Halbmesser eines Kreises ist von allen Kreisen wahr, so weit sie es von irgend einem

ist, allein sie ist nicht von irgend einem einzigen Kreise genau wahr, sie ist es nur annähernd, – so annähernd, daß man praktisch keinen Irrthum von Bedeutung begehen wird, wenn man sie als genau wahr annimmt.“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 5, S. 261]

Mill belegt hier seine vorher nur am Beispiel entwickelte These der induktiven Herkunft der Axiome. Er stellt fest, dass die Evidenz, die die Axiome aus der Anschauung heraus gewinnen, sogar soweit wirkt, dass man eventuelle Abweichungen in den Beobachtungen mit der Unvollkommenheit der Konstruktion zurückführen, statt an den Axiomen zweifeln:

„Wenn wir Veranlassung finden, diese Inductionen oder ihre Folgesätze auf Fälle auszu-dehnen, bei denen der Irrthum bemerkbar wäre [...] so berichtigen wir unsere Schlüsse dadurch, daß wir eine frische Reihe von Sätzen, die auf die Abweichung Bezug haben, mit ihnen in Verbindung setzen [...].“ [Mill 1885, Buch 2, Kap. 5, S. 261f.]

GILLIES bemerkt in diesem Zusammenhang die Parallelen zwischen Geometrie und anderen Wissenschaften:

„Mill seems to be on strong ground here. In many sciences which are generally agreed to be empirical rather than *a priori*, we find that use of entities which we agree only approximately and not exact with what is observed. An obvious example comes from the theory of gases. Here physicists consider the ideal gas and its laws. No observed gas is ever ideal, but calculations about ideal gases are not useless because certain actual gases under certain circumstances do approximate in their behaviour to that of an ideal gas. Moreover where deviations from ideal gases behaviour occur, corrections can be introduced, and the deviations at least partly explained.“ [Gillies 1982, S. 22]

Als Beispiele für eine solche Verallgemeinerung führt Mill zwei Axiome an. Vom ersten – Zwei gerade Linien, die zwischen zwei Punkten gezogen werden, schließen keinen Raum ein – behauptet er mehrfach, dass dies aus der alltäglichen Anschauung offenbar sei, zumindest gebe es keine Gegenbeispiele. Wenn man zwei Linien konstruiert, die dann doch einen Raum einschließen, würde man eher folgern, dass diese nicht gerade seien.² Das zweite – Zwei gerade Linien, die sich in einem Punkt schneiden, schneiden sich in keinem weiteren – sei ebenfalls anschaulich und gelte für alle derartigen Linien. Dabei gesteht er sein, dass man sich die Linien bis in die Unendlichkeit fortgesetzt denken müsse; dieser Prozess widerspricht der Anschaulichkeit als Begründung für Axiome, denn die Unendlichkeit ist nicht

²Das Mill dabei die nicht-euklidische Geometrie außer Acht lässt, die eben solches zulässt, ist nicht verwunderlich. Es gab zwar schon vor seiner Zeit Überlegungen bezüglich einer Geometrie, die die euklidischen Axiome außer Acht lässt, aber die ersten Beispiele (hyperbolische und sphärische Geometrien) wurden erst von Mills Zeitgenossen veröffentlicht und fanden ab 1860 weitere Verbreitung.

anschaulich. Mill wendet dagegen ein, daß schon die Entscheidung, dass unsere Vorstellung die Wirklichkeit adäquat erfasst, eine induktive Verallgemeinerung darstellt.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass Mill die Geometrie als *deduktive Wissenschaft* betrachtet: Von wenigen sehr allgemeinen Axiomen und Definitionen wird auf besondere Sätze und Aussagen über bestimmte geometrische Gebilde geschlossen. Diese Grundpfeiler sind seiner Ansicht nach allerdings das Resultat *induktiver Schlüsse* von der Besonderheit der Anschauung hin zu Aussagen, die auf wesentliche Merkmale der betrachteten Objekte verallgemeinert werden. Dies geht soweit, dass man sich sogar auf Abstraktionen wie Punkte ohne Ausdehnung, Linien ohne Breite und vollkommen gegenstandslose Begriffe wie den der Gleichheit verständigt.

4.2 Arithmetik

Mills Auffassung von der Arithmetik und den Zahlen, mit denen sich diese Wissenschaft beschäftigt, ist der der Geometrie sehr ähnlich:

„Es läßt sich von den Lehren dieser Wissenschaft [die der Zahlen, worunter er Arithmetik und Algebra fasst] schwerer als von denen irgend einer anderen glauben, daß es nicht apriorische, sondern Erfahrungswahrheiten sind, – daß ihre eigentümliche Gewissheit dem Umstande entstammt, daß es nicht unbedingte, sondern nur bedingte Wahrheiten sind.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 295]

Der Zahlbegriff wird bei Mill durch Anschauung geprägt. Zahlen sind demnach Verallgemeinerungen, die der Vorstellung von Ansammlungen von Dingen entspringen und dadurch gebildet werden, dass Gemeinsamkeiten zwischen diesen Ansammlungen gesucht werden. Mill behauptet dazu, leider ohne weiteren Beleg:

„Alle Zahlen müssen Zahlen von Etwas sein: es gibt nichts derartiges wie Zahlen an und für sich. Zehn muß zehn Körper, zehn Töne oder zehn Pulsschläge bedeuten. Allein obgleich Zahlen Zahlen von Etwas sein müssen, so können sie doch Zahlen von Allem und Jedem sein. Sätze über Zahlen besitzen daher die bemerkenswerte Eigenthümlichkeit, daß sie Sätze über alle Dinge ohne Ausnahme sind [...]. Alle Dinge haben eine Größe, bestehen aus Theilen, die man zählen kann, und besitzen insofern insofern alle Eigenschaften, die man Eigenschaften von Zahlen nennt. [...] Wir brauchen uns bloß ein Ding in vier gleiche Theile getheilt zu denken (und alle Dinge kann man so getheilt denken), um von demselben jede Eigenschaft der Zahl vier aussagen zu können, d.h. jeden arithmetischen Satz, in dem die Zahl vier auf einer Seite steht.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 296f.]

Wenn man Mills Auffassung von Induktion in Betracht zieht, wird schnell klar, worauf diese Ansicht abzielt. Mill sucht nach Belegen für seine These, dass auch die Zahlwissenschaft als die seiner Meinung nach allgemeinste der Wissenschaften eine induktive ist.³ Er konzentriert sich daher in seiner Argumentation auf den Punkt, an dem die Induktion bei der gedanklichen Erschaffung von Algebra und Arithmetik zutage tritt.

In einer längeren Passage über die Algebra [Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 297f.] deutet er an, dass dies hier recht einfach sei, wenn man in Betracht ziehe, dass die Buchstaben, die die Algebra verwendet, nur Platzhalter für beliebige Dinge seien. Da man also für diese Buchstaben beliebige Dinge einsetzen könne, und da dann der Wahrheitsgehalt der Sätze immer noch erhalten bliebe, könne man auf die dingliche Vorstellung der Variablen verzichten und das algebraische Schließen zu einem rein mechanischen Denkprozess machen. Der damit erreichte Grad der Allgemeinheit ist ein Zeichen für den induktiven Charakter der Algebra.

In der Arithmetik ist dieser Punkt nach Mills Darstellung etwas schwieriger auszumachen. Er betrachtet dazu eine simple Addition, bricht diese auf die figürliche Ebene herunter und schließt darin auf den Charakter der Zahlwissenschaften:

„Die Aussage: zwei und eins sind gleich drei, als eine Aussage in Betreff von Dingen betrachtet, wie z.B. „zwei Steinchen und ein Steinchen sind = drei Steinchen“, sagt nicht ein Gleichheit zwischen zwei Sammlungen von Steinchen, sondern völlige Einerleiheit aus. Sie sagt aus, daß, wenn wir ein Steinchen zu zwei Steinchen legen, eben dieselben Steinchen drei sind. Da mithin die Gegenstände dieselben sind und die bloße Aussage, daß „Gegenstände dieselben Gegenstände sind“, bedeutungslos ist, so scheint es uns nur natürlich, den Satz: zwei und eins ist gleich drei, als eine Aussage über die bloße Einerleiheit der Bedeutung der zwei Namen zu betrachten.

[...] Drei Steinchen in zwei gesonderten Haufen und drei Steinchen in einem Haufen bringen nicht denselben Eindruck auf die Sinne hervor; und die Aussage, daß eben dieselben Steinchen durch einen Wechsel des Orts und der Aufstellung entweder die eine oder die andere Reihe von Eindrücken hervorbringen kann, ist [...] ein sehr alltäglicher [...] Satz. Es ist eine Wahrheit, die uns durch frühzeitige und unausgesetzte Erfahrung bekannt ist: eine induktive Wahrheit, und solche Wahrheiten bilden die Grundlage der Zahlwissenschaft. Die Grundwahrheiten dieser Wissenschaft wurden bewiesen durch unsere Sinne; sie werden bewiesen, indem man unseren Augen

³Zu Beginn des sechsten Kapitels [Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 294] äußert Mill nahezu wörtlich, dass er *alle* deduktiven Wissenschaften für induktive Wissenschaften hält. Da er dies an dieser Stelle schon sehr ausführlich für die Geometrie und einige Beispiele aus der Logik nachgewiesen hat, macht er sich im sechsten Kapitel daran, dies auch für die Zahlwissenschaften nachzuweisen und somit den seiner Meinung nach endgültigen Widerleg gegen die a priori-Thesen anderer Philosophen – allen voran WHEWELL als führendem Kantianer seiner Zeit – zu liefern.

und unseren Fingern zeigt, daß irgendeine gegebene Anzahl von Gegenständen, zehn Kugeln z.B., durch Zerlegung und Wiederzusammenfügung unseren Sinnen alle die verschiedenen Reihen von Zahlen darbieten können, deren Summe gleich zehn ist.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 298]

Wie schon bei der Geometrie setzt Mill auch bei der Arithmetik eine Existenz als in der Definition implizit enthalten voraus. Er sagt, dass $3 = 2+1$ als Definition der Zahl drei verstanden wird, dass aber diese Definition tatsächlich nur reale Gegebenheiten abbildet:

„Und so können wir den Satz: „drei ist zwei und eins“ eine Definition von drei nennen; aber die Rechnungen, die auf diesem Satz beruhen, folgen nicht aus der Definition selbst, sondern aus einem arithmetischem Lehrsatz, der in ihm vorausgesetzt ist, daß es nämlich Sammlungen von Gegenständen gibt, die während sie auf die Sinne diesen Eindruck machen $\circ\circ\circ$, auch in zwei Theile zerlegt werden können, in dieser Art: $\circ\circ\circ$. Ist dieser Satz zugegeben, so nennen wir alle solche Haufen Dreie, wonach die Angabe der erwähnten physischen Thatsache zugleich als eine Definition des Wortes Drei dienen wird.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 299f.]

„Was ist dasjenige, was der Name einer Zahl mitbezeichnet? Natürlich irgendeine Eigenschaft, welche der Ansammlung von Dingen zukommt, der wir den Namen beilegen; und diese Eigenschaft ist die charakteristische Art, in welcher die Ansammlung aus Theilen besteht und in diese zerlegt werden kann.“

[Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S.352]

Während Mill bei der Betrachtung der Geometrie auf die euklidischen Axiome oder deren Umformulierungen zurückgreift, gibt er für die Arithmetik die drei Axiome direkt an. Seiner Auffassung nach sind dies neben den Definitionen der Zahlen, ausgehend von Summationen der Zahl 1, auch die Axiome, dass die Summen von Gleichem gleich sind und dass die Unterschiede von Gleichem gleich sind. Er hält diese drei Axiome für das Ergebnis von Induktion:

„Diese Axiome und desgleichen die sogenannten Definitionen sind, wie wir bereits bemerkt haben, Ergebnisse der Induction; sie gelten von allen Gegenständen, ohne Unterschied und sie besitzen, wie es scheinen kann, genaue Wahrheit – nicht bloß annähernde, die durch eine hypothetische Annahme zur unbedingten erhoben wird.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 6, S. 300]

Auf die Einschränkung „wie es scheinen kann“ geht er direkt danach ein. Er stellt fest, dass der Wahrheitsgehalt der Sätze über Zahlen von den Voraussetzungen abhängen, dass $1=1$

ist und dass alle Zahlen Zahlen von denselben Einheiten oder Zahlen sind. Er schildert das Versagen der Arithmetik als axiomatisch begründete Wissenschaft, wenn man z.B. ein Pfund und ein Pfund addiert, wobei man außer Acht lässt, dass es sich bei dem ersten um ein britisches Gewicht und bei dem zweiten um ein französisches handelt. Die Summe wird dann weder zwei Pfund im einen noch zwei Pfund im anderen System entsprechen. Weiterhin bemerkt er, dass, selbst wenn es sich um gleiche Einheiten handelt, die Addition immer voraussetzt, dass die addierten Größen exakt gleich sind, was der Realität nie entspricht, denn mit immer feineren Messinstrumenten lassen sich Abweichungen feststellen. Er spielt damit auf den Charakter der Verallgemeinerungen an, der induktiven Prozessen innewohnt. Die Verallgemeinerungen, die die Arithmetik als induktive Wissenschaft kennzeichnen, wurden aus der Anschauung heraus Betreff der Einheiten von Quantität von Dingen gemacht. Man vernachlässigt die exakten Abweichungen der Größen, wenn man mit ihnen rechnet und einigt sich quasi auf eine hinreichende Genauigkeit:

„Was man gewöhnlich mathematische Gewißheit nennt, worin der zwiefache Begriff der unbedingten Wahrheit und der vollkommenen Genauigkeit liegt, ist daher nicht eine Eigenschaft aller mathematischen Wahrheiten, sondern nur jener, die es mit der reinen Zahl allein zu thun haben im Unterschied zu der Quantität im weiteren Sinne, und nur so lange, als wir nicht annehmen, daß die Zahlen ein genauer Ausdruck wirklicher Größen sind.“

[Mill 1885, Buch 2, Kap. 5, S. 301]

Nach Mills Auffassung haben also auch die Zahlwissenschaften, namentlich Arithmetik und Algebra, den Charakter einer *deduktiven Wissenschaft*, die sich auf wenigen, *induktiv* gewonnenen Axiomen und Definitionen aufbaut. Aus der realen Anschauung der Quantität von Dingen, kombiniert mit der Kombination von Gegenständen zu Mengen und der induktiven Definition von Zahlbegriffen, wird ein gesamter mathematischer Zweig entwickelt.

5 Mills Überlegungen zur Begründung mathematischer Sätze

Mill hat im vierten bis sechsten Kapitel des zweiten Buches von *Ein System der deduktiven und induktiven Logik* [Mill 1885] ausführlich dargelegt, dass die Geometrie und die Arithmetik auf Induktion fußende Wissenschaften sind, sie aber gleichzeitig als deduktiv charakterisiert. Letzteres Konzept hat er dabei nur sehr vereinzelt an Beispielen belegt, ohne, wie man heute zahlentheoretisch formulieren würde, die Vollständigkeit des Axiomensystems nachzuweisen.

Das im sechsten Kapitel dargelegte Konzept von Arithmetik – im Wesentlichen die Behauptung, dass $2+1=3$ – ist bisher nur bedingt tragbar, wenn es darum geht, den Inhalt des gesamten Zahlenraumes zu beschreiben. Mill greift dies erst wieder im 24. Kapitel des dritten Buches von auf, wo er beschreibt, wie arithmetische Sätze gebildet werden:

„Jeder Satz der Arithmetik, jede Angabe des Ergebnisses einer arithmetischen Verrichtung ist die Angabe einer der Bildungsweisen einer gegebenen Zahl. Sie sagt aus, daß eine gewisse Sammlung hätte gebildet werden können, indem man gewisse andere Sammlungen zusammentrage oder indem man gewisse Bestandtheile irgend einer Sammlung von dieser wegnähme; und daß wir folglich auch jene Sammlungen wieder aus ihr herstellen können, indem wir das Verfahren umkehren.

[...] Die Bildungsweisen irgendeiner Zahl sind zahllos [sic], aber wenn wir eine Bildungsweise von jeder kennen, so können wir alle übrigen auf deduktivem Wege bestimmen.“
[Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S. 353f.]

Er zeigt sogar den einfachsten dieser Wege auf und macht eine Andeutung, die man aus Sicht der Zahlentheorie als Hinweis auf die Menge der natürlichen Zahlen als einzige induktive Menge deuten kann, wie dies später durch PEANO geschah.

„Was die Arithmetik zum Muster einer deductiven Wissenschaft macht, ist der glückliche Umstand, daß sich ein so umfassendes Gesetz wie dieses: „die Summen von gleichen Größen sind gleich“, auf sie anwenden läßt, oder, um dasselbe in minder gewöhnlicher aber bezeichnender Weise auszudrücken: Alles, was aus Theilen besteht, besteht aus den Theilen der Theile. Diese Wahrheit [...] muß als eine inductive Wahrheit oder ein Naturgesetz von höchstem Range gelten. [sic]

[...] Wir glauben, daß zwei und fünf gleich sieben ist, auf Grund dieses inductiven Gesetzes [...], indem wir jedesmal eine Einheit hinzufügen: $5+1=6$, daher $5+1+1=6+1=7$, und andererseits $2=1+1$, daher $5+2 = 5+1+1=7$.“ [Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S. 355]

Mill erweitert dieses Konzept dann auf die Algebra, indem feststellt, dass verschiedene Zahlen sich zwar nicht in *gleicher Weise* aus *gleichen* Zahlen bilden lassen, hingegen schon in *gleicher Weise* aus *verschiedenen* Zahlen. Die Weise, wie dies geschieht, benennt er als Funktion, um dann festzustellen, dass es nur wenige grundlegende Funktionen gibt:

„Jede Zahl heißt, sofern man sie aus einer anderen Zahl gebildet ansieht, eine Function derselben [...]. Die einfachen Functionen sind keineswegs zahlreich, indem die meisten Functionen aus der Vereinigung mehrerer von den Verrichtungen bestehen, die einfache Functionen ausmachen, oder aus mehreren Wiederholungen irgend einer von diesen Verrichtungen. Die einfachen Functionen irgend einer Zahl x lassen sich insgesamt auf die folgenden Formeln zurückführen: $x + a$, $x - a$, ax , $\frac{x}{a}$, x^a , $\sqrt[a]{x}$, $\log x$ (von der Basis a), [...] $\sin x$ und $\arcsin x$ ($\sin x = x$).“ [Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S. 356]

Mit der Einführung dieses Konzeptes hat Mill ein Mittel, die gesamte Algebra auf diese Basisfunktionen zurückzuführen in ähnlicher Weise, wie er es zuvor für die Arithmetik

getan hat. Wenn man jede beliebige Funktion nur in diese Basisfunktionen zergliedert, sieht man, dass auch die Algebra deduktiven Charakter besitzt. Dies verhilft ihm zu dem Schluss:

„Und von dieser Art sind alle Theoreme der Zahlwissenschaft. Sie sind insgesamt Aussagen über die Identität des Ergebnisses verschiedener Bildungsweisen. [...]

Das oben Dargelegte ist Ziel und Zweck des Calcüls. Was seine Prozesse betrifft, so weiß Jedermann, daß sie einfach deduktiver Art sind. Wenn wir einen algebraischen Satz beweisen oder eine Gleichung auflösen, so schreiten wir [...] durch eine Schlußfolgerung vor, in der die einzigen Prämissen neben den ursprünglichen Voraussetzungen die bereits erwähnten Grundaxiome sind [...]. Bei jedem Schritte im Beweise oder in der Rechnung wenden wir die eine oder andere von diesen Wahrheiten an [...].“

[Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S. 357f.]

Mill liefert hier eine Begründung dafür, warum die Zahlwissenschaften mit so wenigen Axiomen auskommt und dass dieses System aus seiner Sicht vollständig ist.

Er hat in seinen bisherigen Betrachtungen die Geometrie außen vor gelassen, um nun einen Kunstgriff anzuwenden. Er führt die Geometrie auf Arithmetik und Algebra zurück, indem er ein Koordinatensystem einführt und somit geometrische Probleme auf algebraische transformiert. Damit hat er den Nachweis, dass die gesamte Geometrie vollständig durch wenige Grundaxiome zu beschreiben ist, denn die Axiome von der Gleichheit bzw. Ungleichheit von Größen tauchen auch in der Arithmetik und Algebra auf. Mill schreibt dazu:

„Erstlich lassen sich alle Fragen über Lage und Gestalt auf Fragen der Größe zurückführen. Die Lage und Gestalt eines Gegenstandes sind bestimmt, wenn man die Lage einer hinreichenden Anzahl von Punkten an ihm bestimmt; und die Lage eines jeden Punktes läßt sich durch die Größe dreier rechtwinkliger Coordinaten bestimmen, daß heißt Senkrechten, die man von dem Punkte aus auf drei beliebig gewählte, zueinander rechtwinklige Ebenen herabzieht. Durch diese Umgestaltung aller Fragen der Qualität auf bloße Fragen der Quantität wird die Aufgabe der Geometrie auf die einzige Frage der Messung von Größen, das heißt der Ermittlung der unter ihnen obwaltenden Gleichheiten zurückgeführt.“ [Mill 1885, Buch 3, Kap. 24, S. 361]

6 Freges Kritik an Mills Sichtweise

Wie MICHAEL D. RESNIK [Resnik 1980] und GLENN KITCHER [Kitcher 1980] in ihren Artikeln zusammenfassen, hat GOTTLIEB FREGE, ein Zeitgenosse von Mill, in seinem Buch

Die Grundlagen der Arithmetik [Frege 1884] einige Behauptungen Mills aufgegriffen und kritisiert. In diesem Abschnitt möchte ich die wesentlichsten davon kurz darstellen. Ich stütze mich dabei auf deckungsgleiche Schilderungen in den o.g. Artikeln, denn die von beiden Autoren verwendete übersetzte englische Ausgabe steht mir nicht zur Verfügung. Einige der dort zitierten Passagen habe ich am deutschen Original [Frege 1884] verifiziert.

Betreffend der Aussage, $3+2=1$ sei nur eine Erklärung der Realität und immer bezogen auf Objekte, die in der ein oder anderen Weise gruppiert werden können, wirft Frege die Frage auf, was mit Objekten sei, die sich nicht kombinieren ließen und forderte Mill auf, die Wahrnehmungen zu benennen, aus denen sich große Zahlen ableiten lassen.

Resnik schreibt weiter:

„Frege also complained that Mill gave no account of the facts underlying the definitions of zero or one [...]. Nor it is clear from Mills approach what those facts could be. For he supports the definitions of individual numbers through facts about the composition and decomposition of aggregates of physical objects. But how do you compose an aggregate of zero physical objects? There are classes of zero objects but no aggregates or heaps made out of nothing [...].“

[Resnik 1980, S. 154]

Frege bemerkte weiterhin, dass wir auch von Addition, Subtraktion usw. sprechen bei hypothetischen Operationen mit Mengen von Objekten. Wir können sagen, dass wir zwei Objekte im Keller und eins auf dem Dachboden haben und wissen, dass wir insgesamt drei Objekte haben, ohne sie jemals zusammenzufügen. Weiterhin können wir auch Dinge zählen, die keine physikalische Existenz haben, z.B. Ideen, Methoden, Theoreme oder sogar die Zahlen selber.

„And since there is not even the possibility of heaping this things together, addition cannot be identified with a physical operation. But if addition cannot be identified with a physical operation, then the laws of addition are not laws of nature.“

[Resnik 1980, S. 155]

Frege hatte auch Einwände gegen Mills Auffassung von der Zahl selber, wie Kitcher an einem Beispiel verdeutlicht:

„Frege is concerned primarily with Mill’s suggestion that numbers are properties of agglomerations, or properties of aggregates. More generally, he denies that statement of number predicate properties of objects [...] of any kind. Consider a normal property such as *being red*. Given any object, the question whether this object exemplifies this property has a determinate answer. Any object is either red or non-red. This, Frege argues, is a characteristic feature of all properties. Numbers, however, do not share

this feature. If I present someone with a complete deck of cards and ask “Does this have the number 1?”, there’s no determinate answer that can be given. The deck has the number one, if we are counting decks, the number 4 if we are counting suits, and the number 52 if we are counting cards. [...] In short, an ascription of number is always a relative thing. [...] Numbers are not properties of objects.“ [Kitcher 1980, S. 66]

Ein weiterer Kritikpunkt Freges an Mills Theorie der zusammengesetzten Zahlen ist, dass Mill bei der Operation $5+1+1=7$ und $2=1+1$, daher $5+2=5+1+1=7$ das Assoziativgesetz voraussetzt und dies nicht explizit mit in seine Betrachtung der Grundaxiome aufnimmt.

Dies sind nur einige der wichtigsten Punkte, die bei Resnik und Kitcher diskutiert werden. Während Resnik Freges Kritik nur kurz zusammenfasst, um anschließend auf die *Grundlagen der Arithmetik* [Frege 1884] einzugehen, versucht Kitcher in seinem Artikel, die Kritik Freges zu relativieren und stellt Überlegungen an, ob Mills Arithmetik-Konzept nicht doch tragbar sei. An der Auseinandersetzung zwischen Mill und Frege zeigt sich, daß beide versuchen, ihre Sichtweise gegen die jeweils andere zu verteidigen, was sich an der Diskussion über Einzelheiten manifestiert. Dies verdeutlicht, welche Schwierigkeiten es bei der philosophischen Suche nach einem geschlossenen Konzept von Wissenschaft im Allgemeinen und Mathematik im Besonderen geben kann.

Literatur

Zugrunde liegende Literatur

- [Mill 1843] John Stuart Mill: *A system of logic, ratiocinative and inductive*. In: Collected works of John Stuart Mill. Toronto [u.a.]: University of Toronto Press [u.a.]. 1978. Books 7 and 8.
- [Mill 1885] John Stuart Mill: *System der deduktiven und induktiven Logik*. In: Gesammelte Werke; Autorisierte Übersetzung unter Redaktion von Theodor Gompertz. 2. dt. Auflage, Neudruck der Ausgabe Leipzig 1884. Aalen: Scientia-Verlag. 1968. Band 3 (Buch 2) und Band 4 (Buch 3).
- [Resnik 1980] Michael D. Resnik: *Mill’s Empiricism*. In: Frege and the philosophy of mathematics. Ithaca/London: Cornell University Press. 1980. Chapter Four. Pages 137-160.
- [Gillies 1982] Douglas A. Gillies: *Mill’s Theory of Mathematics*. In: Frege, Dedekind, and Peano on the foundations of arithmetic. Assen: Van Gorcum. 1982. Chapter 3. Pages 20-26.
- [Kitcher 1980] Glenn Kitcher: *Frege, Mill, and the foundations of arithmetics*. In: “The Journal of Philosophy” 77, 1980. Pages 65-69.

[Frege 1884] Gottlob Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Hamburg: Meiner. 1986.

Weitere Werke von John Stuart Mill

[Mill 1873] John Stuart Mill: *Principles of political economy*. London: Longmans, Green, Reader and Dyer. 1873.

[Mill 1864] John Stuart Mill: *Der Utilitarismus*. Stuttgart: Reclam, 1985.

[Mill 1869] John Stuart Mill: *The Subjection of Women*. In: Collected works of John Stuart Mill. Toronto [u.a.]: University of Toronto Press [u.a.]. 1978. Book 5.

Zur Biographie

[Biographie] Philipps-Universität Marburg, Institut für Politikwissenschaft: Biographie John Stuart Mill. Im Internet abrufbar unter <http://staff-www.uni-marburg.de/~multimed/theorie/klassik/mill/biographie.html>, aufgerufen am 08. Mai 2005

[Enzykl] Jürgen Mittelstra [Hrsg.]: Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Mannheim [u.a.]: Bibliographisches Institut. 1984. Band 2; Artikel John Stuart Mill.