Beispielaufgabe zur Vollständigen Induktion

Jens Bödeker
jens.boedeker@mail.uni-oldenburg.de

Lars Hoegen
studium@hoegen.info

18. Juni 2003

Anahnd des ausführlichen Beipiels soll verdeutlicht werden, wie eine vollständige Induktion zustande kommt. Es enstammt dem im Handout gelisteten Buch von Polya.

Man kann zufällig beoachten, daß

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

ist. Bei scharfem Hinsehen erkennt man die Potenzen

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Frage: Ist das Zufall? Kommt es oft vor, daß die Summe aufeinanderfolgender Kubikzahlen eine Quadratzahl ist? Gegenstand unserer Frage ist offenbar die Summe beliebig vieler aufeinanderfolgender Kubikzahlen

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Um die Frage nach der Allgemeingültigkeit zu klären, kann man nun Zahlen einsetzen und eine Liste aufstellen:

$$\begin{array}{lcr} 1 & = & 1 = 1^2 \\ 1+8 & = & 9 = 3^2 \\ 1+8+27 & = & 36 = 6^2 \\ 1+8+27+64 & = & 100 = 10^2 \\ 1+8+27+64+125 & = & 225 = 15^2 \end{array}$$

Es ist kaum anzunehmen, daß diese Summen aufeinanderfolgender Kubikzahlen durch bloßen Zufall Quadratzahlen sind. Es liegt nahe, eine Gesetzmäßigkeit zu formulieren in der Art:

> *Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist eine Quadratzahl.*

Bis hierher wurde Deduktion dort angewendet, wo auf bekannte Rechenregeln zurückgegriffen wurde, als z.B. auf die Definition von Exponenten. Man verknüpft diese Regeln miteinander zu neuen Regeln.

Das Verfahren der Induktion findet sich hier in dem Schließen von speziellen Fällen auf eine allgemeine Aussage wieder. Die Liste der Zahlen deutet auf eine Gesetzmäßigkeit hin, die induktiv gefunden und formuliert wurde.

Zugegebenrmaßen unterscheiden sich hier die Mathematiker von allen anderen Naturwissenschaftlern. Würde es z.B. einem Physiker genügen, hinreichend viele Zahlen zu untersuchen um dann o.g. Schluß als sicher anzunehmen, so sagt die Mathematik, daß die Aussage nur durch Induktion *nahegelegt* wird. Ein mathematischer Beweis ist die Induktion nicht.

Wie untersucht man das Phanomen nun weiter? Zunächst ist es immer sinnvoll, zu verallgemeinern. Über die linke Seite der Gleichung ist bekannt, daß sie aufeinanderfolgende Kubikzahlen aufsummiert. Untersuche demnach die rechet Seite auf eine Analogie.

Offenbar wächst die Basis auf der rechten Seite. Bilde die Differenzen, um auf einen Zusammenhang schließen zu können:

$$3 - 1 = 2,\ 6 - 3 = 3,$$
$$10 - 6 = 4,\ 15 - 5 = 5$$

Diese Differenzen sind auffallend regelmäßig. Die Basen werden augenscheinlich durch Summieren der ersten n Zahlen gebildet:

$$\begin{aligned}1 &= 1\\ 3 &= 1+2\\ 6 &= 1+2+3\\ 10 &= 1+2+3+4\\ 15 &= 1+2+3+4+5\end{aligned}$$

Wenn diese Regelmäßigkeit allgemein gilt, nimmt der Lehrsatz genauere Gestalt an:

Es gilt für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}&1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3\\ &\quad= (1+2+3+\cdots+n)^2\end{aligned}$$

Dieses vermutete Gesetz wurde durch Induktion gefunden. Die Induktion versucht, Regelmäßigkeit und Zusammenhang hinter Beobachtungen zu finden. Einige Hilfsmittel sind dabei Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie.
Nun steht noch der Beweis aus, der die Mathematik als deduktive Wissenschaft kennzeichnet.

Zunächst einmal kann man die rechte Seite vereinfachen, denn es gilt

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Damit kann man das durch Induktion gefundene Resultat umformen zu:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (\star)$$

Dies Formel ist nach den bisherigen Überlegungen sehr wahrscheinlich allgemeingültig, d.h. für alle Werte von n. Bleibt sie auch gültig, wenn man von n auf einen Wert $n+1$ übergeht?
Wenn dem so wäre, müßte gemäß $(\star)$ auch

$$\begin{aligned}&1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3\\ &\qquad= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \quad (\bullet)\end{aligned}$$

Man kann diese Formel mit den bekannten Mitteln der Mathematik, also deduktiv, auf ihren Wahrheitsgehalt hin prüfen. Subtrahiere von $(\bullet)$ die Gleichung $(\star)$, dann erhält man:

$$\begin{aligned}&(n+1)^3 =\\ &\quad\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Die rechte Seite läßt sich umformen zu:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2\right]\\ &\quad= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left[n^2 + 4n + 4 - n^2\right]\\ &\quad= \frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)\\ &\quad= (n+1)^2(n+1)\\ &\quad= (n+1)^3\end{aligned}$$

Die Formel hat also die Probe bestanden. Damit ist einwandfrei bewiesen, daß

$$\begin{aligned}&(n+1)^3 =\\ &\quad\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Hingegen ist noch nicht bewiesen, daß $(\star)$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. *Wenn* man wüßte, daß dies richtig *wäre*, dann würde man, wie eben gezeigt, folgern können, daß $(\star)$ auch für die nächste ganze Zahl $n+1$ gilt.
Nun ist aber schon gezeigt worden, daß

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (\star)$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gilt. Nach dem oben gezeigten Kriterium folgt auch, daß dies für $n = 6$ gilt. Da die Gültigkeit für $n = 6$ gezeigt ist, gilt die Aussage auch für $n = 7$...

Diese Aussage läßt sich nun als Schleife beliebig fortführen, so daß die Aussage für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, denn auf diese Art kann man eine Schlußkette bis zu jedem beliebigen n fortführen.
Man nennt dieses Verfahren *Schluß von n nach n+1* oder auch *vollständige Induktion.*