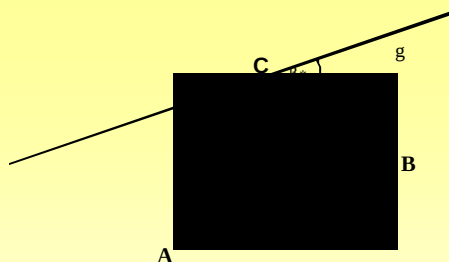


Beweisen, Argumentieren und Begründen im Mathematikunterricht

Kristina Reiss
Fachbereich Mathematik
Universität Oldenburg



„Mmh ... ich erinnere mich gerade irgendwie ... wie unser Lehrer uns das erzählt hat. Aber der hat auch nur gesagt, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt ... der hat das auch nicht irgendwie begründet oder so ...“

Antonia (Klasse 8)

(1) Aspekte des theoretischen Hintergrunds

NCTM Standards 2000

Logisches Argumentieren und Beweisen soll Inhalt des Mathematikunterrichts sein, damit Schüler

- diese Aspekte als wesentlich und nützlich für die Mathematik begreifen können;
- lernen, mathematische Behauptungen aufzustellen und zu untersuchen;
- mathematische Argumentationen und Beweise entwickeln und bewerten können;
- situationsangemessen verschiedene Argumentationen und Beweismethoden auswählen, anwenden und beurteilen können.

Mathematical Literacy

bezeichnet die Fähigkeit,
„die Rolle, die Mathematik in der Welt
spielt, zu erkennen und zu verstehen,
**begründete mathematische Urteile
abzugeben** und sich auf eine Weise mit
der Mathematik zu befassen, die den
Anforderungen des gegenwärtigen und
zukünftigen Lebens einer Person als
eines konstruktiven, engagierten und
reflektierenden Bürger entspricht.“

PISA

Deutsches PISA-Konsortium, 2001, S. 141

Kompetenzstufenmodell

(vgl. Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001)

Stufe III

Modellieren und begriffliches Verknüpfen

Stufe IV

Umfangreiche Modellierung unterschiedlicher mathematischer Bereiche

und zur Lösung von Problemen nutzen,

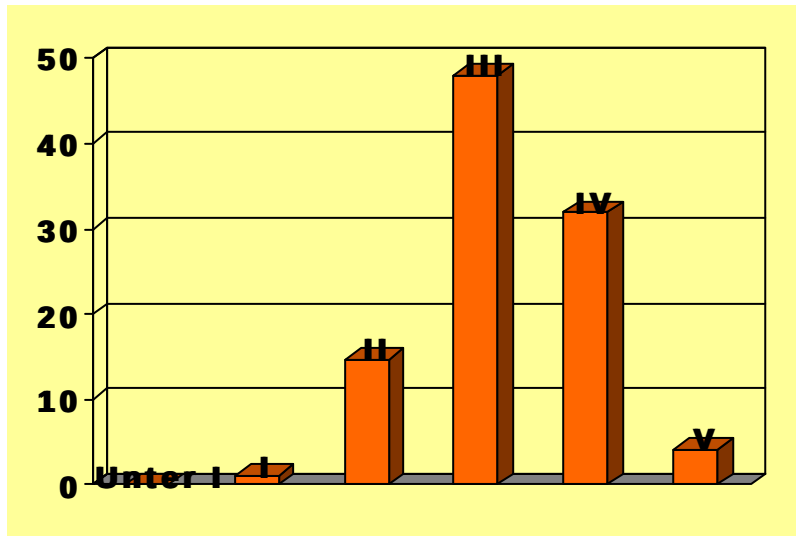
Stufe V

Lösungen über Zwischenergebnisse
Komplexe Modellierung und
hinweg aufbauen; unter vielfältigen
innermathematisches Argumentieren
Lösungswegen einen eigenen finden “

„Begriffliche Modellierungsleistungen umfassen
Begründungen und Beweise sowie das
Reflektieren über den Modellierungsprozess.“

Prozentuale Verteilung auf die Kompetenzstufen (Gymnasium)

(vgl. Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001)



Einschränkungen des präadoleszenten wissenschaftlichen Denkens

- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert;
- Widersprüche zwischen Evidenz und Theorie führen zur Modifikation der Evidenz und nicht der Theorie;
- Versuchspläne zur Prüfung einer Theorie werden nicht entwickelt, insbesondere Konfundierungen von Variablen nicht berücksichtigt;
- Hypothesen werden früh angenommen, auch wenn Alternativerklärungen nicht ausgeschlossen sind;
- Gegenbeispiele werden nicht als ausreichend zur Widerlegung betrachtet, Anhäufung empirischer Evidenz wird gesucht.

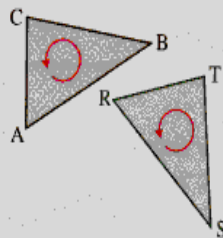
„Do we need proof in school mathematics?“
„Absolutely. Need I say more? Absolutely.“ (Schoenfeld, 1994).

(2) Beweis des Kongruenzsatzes SSS

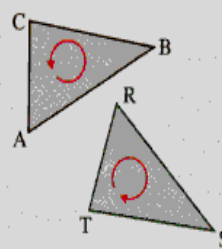
Gegeben sind zwei beliebige Dreiecke ABC und RST mit $|AB| = |RS|$, $|BC| = |ST|$ und $|AC| = |RT|$.

Gesucht ist nun eine Kongruenzabbildung, die das Dreieck ABC auf das Dreieck RST abbildet.

Fall (a): ABC und RST haben denselben Umlaufsinn.



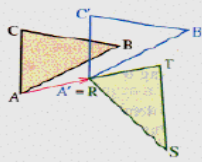
Fall (b): ABC und RST haben verschiedenen Umlaufsinn.



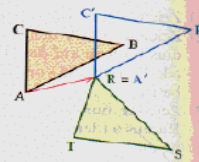
Wir gehen in folgenden Schritten vor:

1. Schritt: Durch die Verschiebung V_{AR} wird der Eckpunkt A des Dreiecks ABC auf den Punkt R abgebildet. Durch die Verschiebung erhalten wir ein Dreieck $A'B'C'$ mit $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ und $|AC| = |A'C'|$. Dabei ist $A' = R$.

1. Fall, 1. Schritt



2. Fall, 1. Schritt



2. Schritt: Durch die Drehung $D_{R\varphi}$ mit $\varphi = \angle BRS$ wird die Seite $A'B'$ auf die dazu gleich lange Seite RS abgebildet.

Für den Bildpunkt C'' von C' gibt es dann zwei Möglichkeiten:

Fall (1): C' fällt mit T zusammen (linkes Bild).

Dann wird $A'B'C'$ auf RST abgebildet.

Fall (2): C' fällt nicht mit T zusammen (rechtes Bild).

Da bei einer Drehung die Länge einer Strecke erhalten bleibt, gilt:

(1) $|RC'| = |A'C'|$ und $|A'C'| = |AC| = |RT|$ und somit $|RC'| = |RT|$.

Also liegt C' auf dem Kreis um R mit dem Radius $|RT|$.

(2) $|SC'| = |B'C'|$ und $|B'C'| = |BC| = |ST|$ und somit $|SC'| = |ST|$.

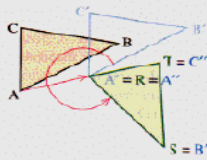
Also liegt C' auf dem Kreis um S mit dem Radius $|ST|$.

Wegen $C' \neq T$ liegen C' und T symmetrisch zu der Geraden RS. Durch eine Achsenspiegelung an RS wird das Dreieck $A'B'C''$ auf das Dreieck RST abgebildet.

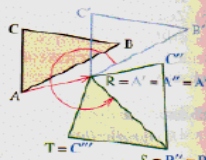
Durch die Verkettung $V_{AR} \circ D_{R\varphi}$ bzw. $V_{AR} \circ D_{R\varphi} \circ S_{RS}$ wird insgesamt das Dreieck ABC auf das Dreieck RST abgebildet. Die beiden Dreiecke sind somit kongruent zueinander.

Im Beispiel benötigen wir eine Verschiebung, eine Drehung und ggf. eine Achsenspiegelung. In Abschnitt 3.6 (Seite 136) wird die Frage behandelt, wie viele Kongruenzabbildungen man bei einem solchen Beweis überhaupt braucht.

1. Fall, 2. Schritt



1. Fall, 2. Schritt



Griesel, H. & Postel, H. (1999). Elemente der Mathematik 8. Niedersachsen (S. 104). Hannover: Schroedel.

8

Aspekte mathematischen Beweisens

- Exploration der Problemstellung; Entwicklung einer Hypothese, Identifikation möglicher Argumente;
- Formulierung dieser Hypothese gemäß den Konventionen;
- Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen;
- Auswahl von Argumenten und Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen;
- Organisation der Argumente in einen Beweis, der den mathematischen (Publikations-)Standards entspricht;
- Annäherung an einen formalen Beweis;
- Kontrolle durch die „mathematische Community“.

Basis: Phasenmodell des Beweisens von Boero (1999)

*Der Beweis eines Theorems ist ein Pfad, der von allgemein geteilten Aussagen startet und durch eine Reihe von Schritten einen psychologischen Zustand hervorruft, in dem das Theorem **offenkundig** erscheint.*

(Thom, 1973)

*Beweise, die Einsicht in die relevanten Begriffe vermitteln, sind für uns als Forscher und Lehrer interessanter und wertvoller als Beweise, die nur die Gültigkeit der Behauptung belegen. Wir haben Beweise gern, die das **Wesentliche herausstellen**. Wenn der einzig verfügbare Beweis eines Resultats künstlich oder hergeholt erscheint, sind wir irritiert. Wir halten inne und denken nach.*

(Long, 1986)

(2) Argumentieren, Begründen und Beweisen am Beispiel der Elementargeometrie – eine empirische Studie

Leitfragen der Untersuchung

- Welche kognitiven und nichtkognitiven Variablen beeinflussen die Lösungskompetenz bei Beweisaufgaben?
- Welche Unterrichtsbedingungen fördern das Verständnis für das Begründen und Beweisen?
- Welche Interdependenzen gibt es zwischen individuellen Variablen und Unterrichtsvariablen?

Stichprobe

- 358 Schülerinnen und 301 Schüler der Jahrgangsstufe 7/8 an Gymnasien in 27 Klassen
- 22 Lehrerinnen und Lehrer

Durchführung der Studie in der Jahrgangsstufe 7/8 (Vortest in Klasse 7)

- Präsentation von Aufgaben zur Geometrie, davon 6 Items zu Basisfähigkeiten und 7 Items zum Argumentieren und Beweisen
- Fragen zum Beweisverständnis
- Fragen zum wissenschaftstheoretischen Grundverständnis
- Fragen zu mathematischen Beliefs

Durchführung der Studie in der Jahrgangsstufe 7/8 (Lehrerfragebogen)

- Fragen zum präferierten Unterrichtsstil
- Fragen zu mathematischen Beliefs

Durchführung der Studie in der Jahrgangsstufe 7/8 (Hauptphase in Klasse 8)

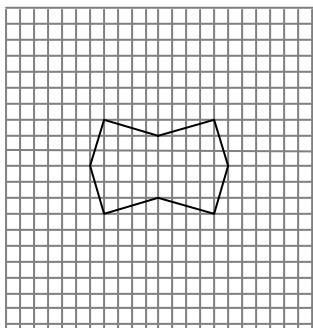
- Videografierte
Unterrichtsbeobachtungen
- Schülerbefragungen zu aktuellen
Unterrichtsstunden
- Einzelinterviews mit ausgewählten
Schülerinnen und Schülern

Durchführung der Studie in der Jahrgangsstufe 7/8 (Nachtest in Klasse 8)

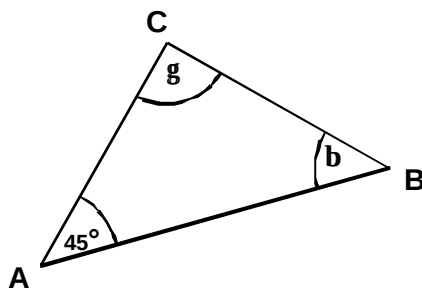
- Präsentation von Aufgaben zu Basisfähigkeiten und zum Argumentieren und Beweisen in der Geometrie
- Erfassung von Metakognition
- Fragen zu Interesse und Motivation
- Fragen zum logischen Denken
- Test zum visuell-räumlichen Denken

- Aufgaben des Vortests
(Klasse 7)
und Ergebnisse

Basiskompetenzen im Bereich der Geometrie

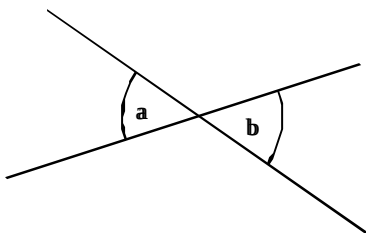


Zeichne alle
Symmetrieachsen
ein!

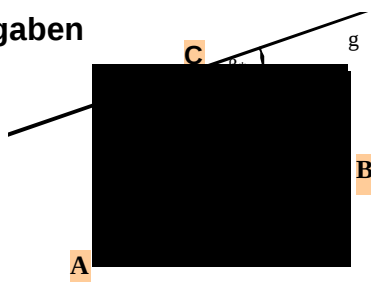


Das Dreieck ist gleich-
schenkelig mit $|AC| = |BC|$.
Berechne die fehlenden
Winkel!

Argumentationsbasierte Aufgaben



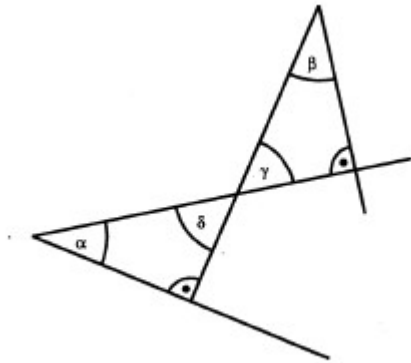
Begründe: Die
gegenüberliegenden
Winkel $\sphericalangle a$ und $\sphericalangle b$ sind
gleich groß!



Warum gilt $\sphericalangle a = \sphericalangle b$ und
 $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, wenn g
parallel zu AB ist?

Begründe, dass die
Winkelsumme im Dreieck
 180° beträgt.

Kompetenzen im Bereich des Argumentierens und Begründens



Begründe!

$$d = g$$

$$a + d = b + g$$

$$a = b$$

**Berechne die
fehlenden Winkel.**

Berechne die
fehlenden Winkel.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\beta &= 140^\circ (180^\circ - 40^\circ) \\ \gamma &= 40^\circ (180^\circ - 140^\circ) \\ \delta &= 140^\circ (180^\circ - 40^\circ)\end{aligned}$$

Berechne die
fehlenden Winkel.

Rechnung:

Das ganze muss 360° betragen.

* Der 40° Winkel ist = den γ Winkel, also
 ~~$\gamma = 40^\circ$~~ $\gamma = 40^\circ$.

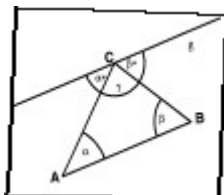
also... $40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$

$$\begin{array}{r} 360^\circ \\ - 80^\circ \\ \hline 280^\circ \end{array}$$

$280^\circ : 2 = 140^\circ$

Die beiden Winkel δ und β betragen
jeweils 140°

In jedem
Dreieck ist die
Summe der
Innenwinkel
 180° .



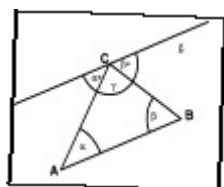
Warum gilt $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$, wenn g parallel zu $\overline{AB}$ ist?

Das gilt weil α^* zu α ein Wechselwinkel ist und das geht nur wenn die zwei Geraden (hier g und c) zueinander parallel sind.

Begründe, dass die Winkelsumme der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt!

α^* ist der Wechselwinkel zu α , also ist er genauso groß. β^* ist Wechselwinkel zu β , also genauso groß. Dann zählt man α^* mit β^* und γ zusammen. $\alpha^* + \beta^* + \gamma = 180^\circ$

In jedem Dreieck
ist die Summe
der Innenwinkel
 180° .



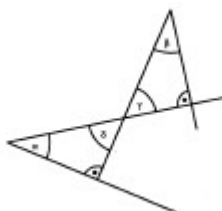
Warum gilt $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$, wenn g parallel zu $\overline{AB}$ ist?

$\alpha = \alpha^*$, weil es Stufenwinkel sind in einer Parallelen.
 $\beta = \beta^*$, genau wie bei $\alpha = \alpha^*$

Begründe, dass die Winkelsumme der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt!

Die Winkelsumme der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180° , weil der Winkelsummensatz 180° beträgt

Betrachte die folgende Figur!



(1) $\delta = \epsilon$

Scheitelwinkel

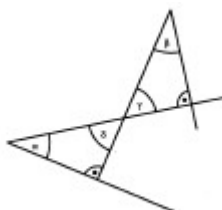
(2) $\alpha + \delta = \beta + \gamma$

weil die Winkelsumme in beiden Dreiecken 180° ergeben muss und ein rechter Winkel gegeben ist

(3) $\alpha = \beta$

γ und δ sind gleich groß und es sind in beiden Dreiecken jeweils ein rechter Winkel vorhanden, also müssen $\alpha = \beta$ gleich groß sein

Betrachte die folgende Figur!



gegeben:

(1) $\delta = \epsilon$

δ ist der Scheitelwinkel von ϵ

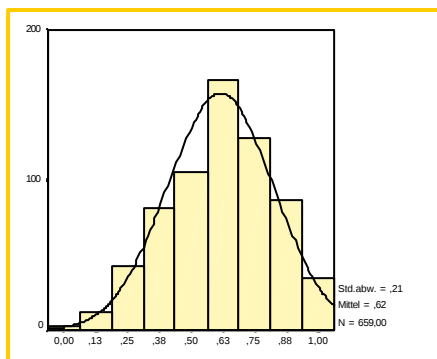
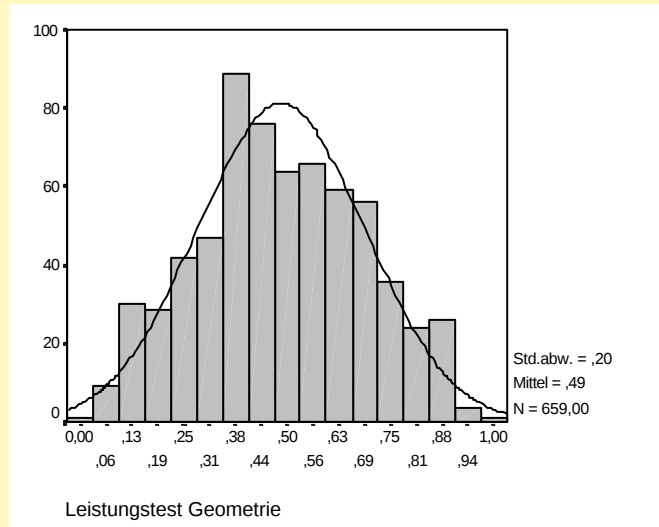
(2) $\alpha + \delta = \beta + \gamma$

Wenn δ und ϵ gleich groß sind und γ in beiden Dreiecken ein 90° Winkel ($\square$) gibt, müssen α und β gleich groß sein, damit in jedem Dreieck 180° sind

(3) $\alpha = \beta$

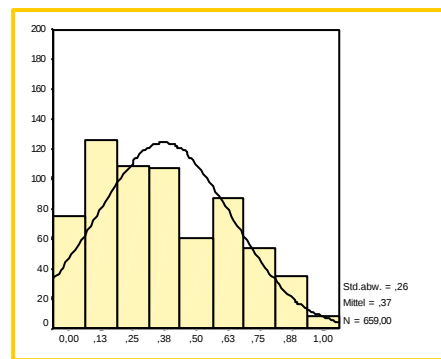
?

Ergebnisse des Leistungstests



Basiskompetenzen

(M=7,4; s=2,5;
maximal 12 Punkte)



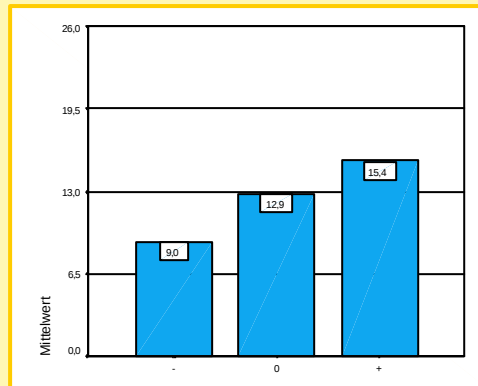
Argumentieren und Begründen

(M=5,2; s=3,7;
maximal 14 Punkte)

Kompetenzstufen mathematischer Argumentation

	Kompetenzstufe I Einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern $\bar{x}=0,9$	Kompetenzstufe II Argumentieren und Begründen (einschrittig) $\bar{x}=0,5$	Kompetenzstufe III Argumentieren und Begründen (mehrschrittig) $\bar{x}=0,2$
unteres Leistungsdrittel N=238	0,51	0,22	0,00
mittleres Leistungsdrittel N=215	0,72	0,61	0,18
oberes Leistungsdrittel N=206	0,85	0,89	0,50

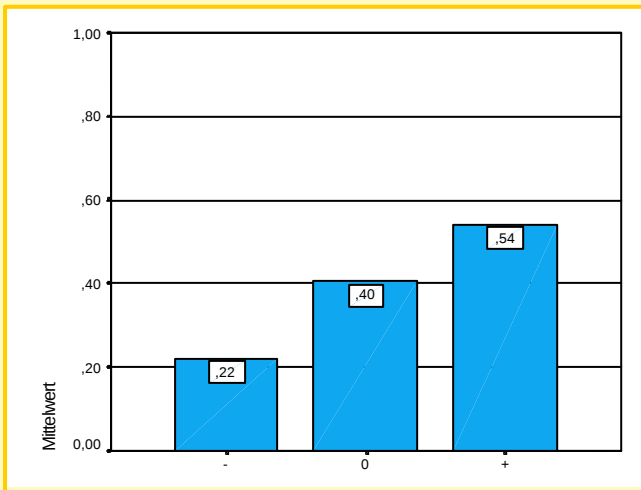
Unterschiede zwischen verschiedenen Klassen



Mittelwerte zwischen
Mmin =5,7 und
Mmax =17,7
(maximal 26 Punkte)

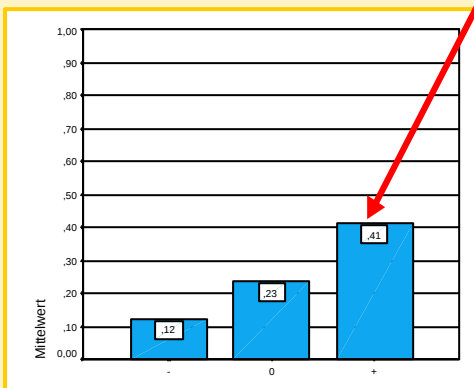
Unteres (-),
mittleres (0),
oberes (+)
Leistungsdrittel

Unterschiede zwischen Klassen im argumentativen Verhalten bei Aufgaben der Kompetenzstufen II & III



Unteres (-),
mittleres (0),
oberes (+)
Leistungsdrittel

Unterschiede im argumentativen Verhalten bei einfachen Rechenaufgaben



Schüler, die einfache Rechnungen begründen, lösen Aufgaben der Kompetenzstufen II & III signifikant besser.

Hypothese:
Ein Klassenklima, in dem argumentative Prozesse gefördert werden, führt zu besseren Leistungen.

unteres (-), mittleres (0) & oberes (+) Leistungsdrittel

Aufgaben zum wissenschaftlichen Denken

Vertrauenslehrer:
Welche der vier Eigen-
schaften, glaubst du,
kommen jetzt noch
in Frage?

Herr Schäfer ist *Vertrauenslehrer*.
Er hat eine sympathische Ausstrahlung
und ist politisch aktiv. Für Schüler nimmt er
sich immer Zeit. Er ist Fußballfan.

Herr Baier ist *kein Vertrauenslehrer*.
Er nimmt sich für Schüler immer Zeit.
Er ist kein Fußballfan.
Er hat eine sympathische Ausstrahlung
und ist politisch nicht aktiv.

Herr Schulte ist *Vertrauenslehrer*.
Er ist Fußballfan und ist politisch
aktiv. Er strahlt Strenge aus. Für Schüler
nimmt er sich immer Zeit.

vgl. Thomas, 1997

Aufgaben zum wissenschaftlichen Denken

	verfremdete Aufgaben nicht gelöst	verfremdete Aufgaben teilweise gelöst	verfremdete Aufgaben voll- ständig gelöst
plausible Aufgaben nicht gelöst	163	22	11
plausible Aufgaben teilweise gelöst	111	54	43
plausible Aufgaben gelöst	80	56	119

Zusammenhang zwischen Fähigkeiten im wissenschaftlichen Denken und im Argumentieren und Begründen

	Kompetenzstufe I Einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern (M=0,69)	Kompetenzstufe II Argumentieren und Begründen (einschrittig) (M=0,56)	Kompetenzstufe III Argumentieren und Begründen (mehrschrittig) (M=0,24)
Keine formale Strategien verfügbar N=354	0,67	0,54	0,20
Formale Strategien in Ansätzen verfügbar N=132	0,66	0,55	0,21
Formale Strategien vollständig verfügbar N=173	0,74	0,60	0,33

Durchführung der Studie in der Jahrgangsstufe 13

- Präsentation von Aufgaben zur Geometrie, davon 4 Multiple Choice Items und 5 offene Items
- Fragen zum Beweisverständnis
- Fragen zum Begriffsverständnis
- Test „Schlauchfiguren“ zum räumlichen Vorstellungsvermögen
- Einzelinterviews mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern

Leitfragen der Untersuchung

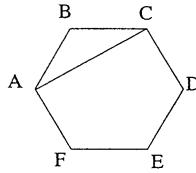
- Wie lösen Schülerinnen und Schüler geometrische Aufgaben?
- Sind Fehler eher auf der methodischen, prozeduralen Ebene zu finden oder sind Fehler eher auf mangelndes Faktenwissen zurück zu führen?
- Welche Rolle spielt das Beweisverständnis für das Lösen geometrischer Aufgaben?

Probanden

81 Schülerinnen und Schüler, davon

Grundkurs Mathematik	59
Leistungskurs Mathematik	22
Mädchen	48
Jungen	33

L 12 Alle Seiten des regulären Sechsecks $ABCDEF$ sind 10 cm lang.
Wie groß ist die Länge der Diagonale $\overline{AC}$?



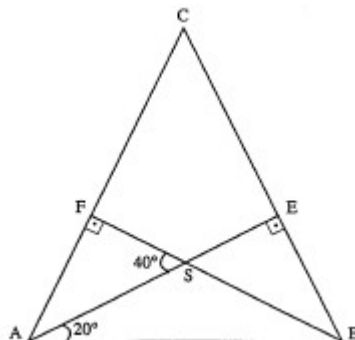
- A. $10\sqrt{3}$ cm
- B. 20 cm
- C. $5\sqrt{3}$ cm
- D. 10 cm
- E. $20\sqrt{3}$ cm

Schwierigkeit: 486 (60%)

K 18 Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AE und BF im Punkt S . $\angle FSA$ mißt 40° und $\angle SAB$ mißt 20° . Schreiben Sie einen Beweis für die folgende Behauptung:

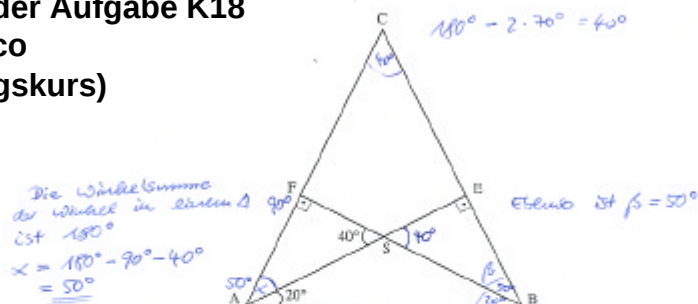
" $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig"

Geben Sie geometrische Begründungen für die einzelnen Schritte Ihres Beweises an



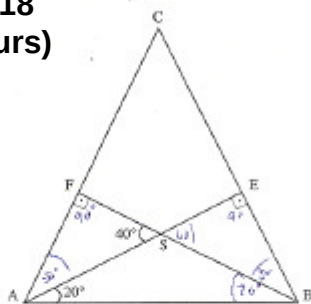
Schwierigkeit: 627 (19%)

**Lösung der Aufgabe K18
von Marco
(Leistungskurs)**



Da behauptet wird, dass das ΔABC gleichschenkelig ist,
benutzen wir diese Behauptung als Voraussetzung.
 $\Rightarrow$ Der Winkel $\angle SFB = 40^\circ$.
Da der Winkel in $A (= 50^\circ)$ ~~un~~ gleich ist mit dem
Winkel in $B (= 50^\circ)$, ist ~~dies~~ der Abstand von A zu BC
gleich dem Abstand von B zu AC .
Das Dreieck ist gleichschenkelig.

**Lösung der Aufgabe K18
von Malte (Leistungskurs)**



- Da $\angle FSA = 40^\circ$ ist $\angle FAS = 50^\circ$
($\angle$ Winkelsumme in einem $\Delta = 180^\circ$)
- Dies gilt auf Grund der Symmetrie auch für das
 ΔSEB .
- Hieraus ist zu folgern (Winkelsumme), dass $\angle FBA = 70^\circ$
und $\angle ABE = 70^\circ$.
- Da diese Winkel gleich sind, mußes sich hier um ein
gleichschenkeliges Dreieck handeln.

Lösung der Aufgabe K18 von Fernanda (Leistungskurs)

gezeigt ist:

zu zeigen: $\overline{AC} = \overline{BC}$ ✓ (70%)

Ergebnis: Da die beiden Winkel des Grundseits $\angle A$ und $\angle B$ gleich sind, müssen auch die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich sein.

Zusammenhang zwischen Winkeln und Seiten:

Pythagoras:
 $AD^2 + DC^2 = AC^2$
 $BD^2 + DC^2 = BC^2$
 da $AD^2 = BD^2$
 (Satz des Pythagoras)
 ist $AC^2 = BC^2$
 da Längen nicht negativ sind
 sind $AC = BC$
 $\rightarrow$ gleichschenkelig

Bestimmung von $\angle ABC$

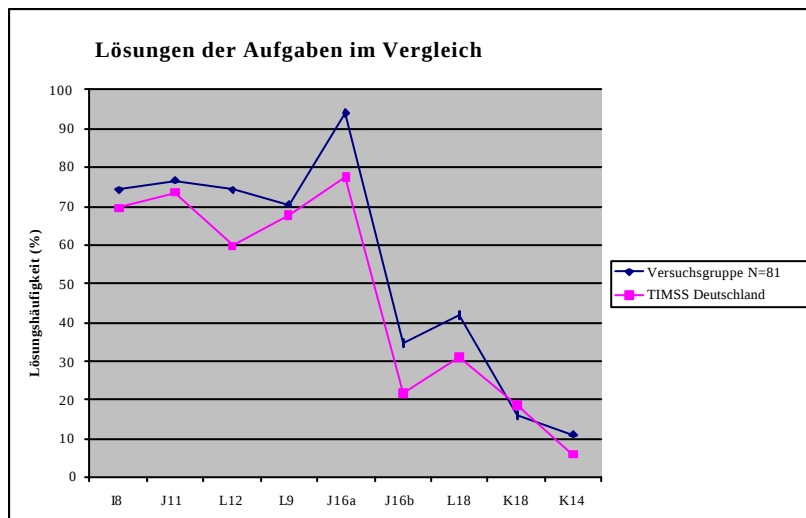
Winkelsumme im Dreieck ABC
 180°
 Seitenwinkel sind gleich
 Winkelsumme im Dreieck ABC
 180°

Lösungshäufigkeiten bei den Multiple-Choice-Items

- Kongruenz von Seiten
Lösungshäufigkeit: 74,1% (69,4%)
- Rotation im Raum
Lösungshäufigkeit: 76,5% (73,5%)
- Diagonalen im Sechseck
Lösungshäufigkeit: 74,1% (59,6%)
- Kongruenzabbildung
Lösungshäufigkeit: 70,4% (67,6%)

Lösungshäufigkeiten bei den offenen Items

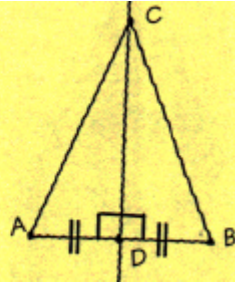
- Achsenspiegelung
Lösungshäufigkeit: 93,8% (77,4%)
- Drehung
Lösungshäufigkeit: 34,6% (21,4%)
- Satz des Pythagoras
Lösungshäufigkeit: 42,0% (31,0%)
- Gleichschenkliges Dreieck
Lösungshäufigkeit: 16,1% (18,5%)
- Satz des Pythagoras
Lösungshäufigkeit: 11,1% (5,9%)



Bewerten von Beweisen: Die Aufgabe

In der nebenstehenden Abbildung ist C irgendein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$.

Katrin, Natalie, Leif und Martin haben versucht, folgende Aussage zu beweisen:
Das Dreieck ABC ist stets gleichschenkelig.



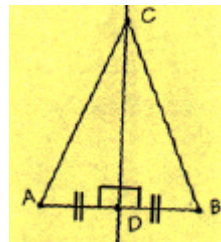
Welche der vier Lösungen kommt dem am nächsten, was Sie schreiben würden?

Welche der vier Lösungen würde Ihr Lehrer am besten benoten?

Lösung 1

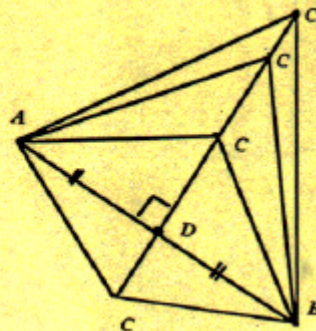
$$C \in m_{\overline{AB}}$$

„Empirisches Argument“



Katrins Antwort

Ich habe C auf der Mittelsenkrechten verschoben und jeweils die Strecken AC und BC gemessen. Sie waren immer gleich lang. Also waren alle Dreiecke gleichschenkelig. Die Behauptung ist daher wahr.



Lösung 2

„Zirkelschluss“

Natalies Antwort

Aussage

Winkel ADC = 90°

Winkel BDC = 90°

Winkel CAB = Winkel CBD

Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$

Die Behauptung ist also wahr.

Begründung

senkrechte Linie

senkrechte Linie

Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind immer gleich

Lösung 3

„Formale Argumentation“

Leifs Antwort

Aussage

$\overline{AD} = \overline{BD}$

Winkel ADC = 90°

Winkel BDC = 90°

$\overline{DC} = \overline{CD}$

Dreieck ADC und Dreieck BDC sind kongruent

Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$

Die Behauptung ist also wahr.

Begründung

Mittelsenkrechte teilt $\overline{AB}$ in gleiche Abschnitte

senkrechte Linie

senkrechte Linie

dieselbe Strecke

2 Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich

Lösung 4

„Narrative Argumentation“

Martins Antwort

Weil $\overline{CD}$ die Strecke $\overline{AB}$ im rechten Winkel schneidet, ist B der Spiegelpunkt von A. Das Dreieck ABC besteht also aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, die Spiegelbilder voneinander sind. Daher haben die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ dieselbe Länge.

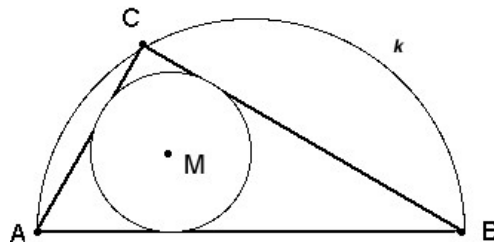
Die Behauptung ist also wahr.

Ergebnisse

Beweis	Relative Häufigkeit (%)	
	Klemente & Reiss	Mathematik & Holzner
Korrekt formulierter Beweis „Leif“		
/ gute Erklärung	35	
/ vom Lehrer gut bewertet	58	48
/ eigene Beweisform	30	24
Korrekt narrative Beweis „Martin“		
/ gute Erklärung	48	
/ vom Lehrer gut bewertet	12	15
/ eigene Beweisform	25	26
Empirische Argumentation „Katri“		
/ gute Erklärung	33	
/ vom Lehrer gut bewertet	4	19
/ eigene Beweisform	10	40
Formale, zirkuläre Argumentation „Natalie“		
/ gute Erklärung	15	
/ vom Lehrer gut bewertet	11	18
/ eigene Beweisform	28	13

Erkennen von korrekten Beweisen

- Der formal formulierte Beweis ist korrekt: 56,8%.
- Der narrativ formulierte Beweis ist korrekt: 29,6%.
- Der Beweis, der einen Zirkelschluss enthält, ist nicht korrekt: 33,3%.
- Spezialfall ist kein Beweis: 51,9%.



$\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Halbkreises k . C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B) und M ist der Mittelpunkt des Kreises von $\triangle ABC$.

Dann

- ändert sich die Größe von $\angle AMB$, wenn sich C aufbewegt
- bleibt die Größe von $\angle AMB$ für jede Lage von C gleich, kann aber, ohne den Radius zu kennen, nicht berechnet werden.
- $\angle AMB = 135^\circ$ für alle C ,
- $\angle AMB = 130^\circ$ für alle C .



Schwierigkeit: 741 (D: 24%)

LUCIA (Grundkurs)

„ c) und d) können schon mal nicht zutreffen, weil ... Pythagoras ... hat gesagt, dass der Winkel immer rechtwinklig ist in C nach diesem Kreis. Also treffen die schon mal nicht zu. Deshalb kann a) auch nicht zutreffen, weil sich die Größe des Winkels nicht ändert, wenn sich C auf k bewegt. Also nehmen wir b). Ist das Einzige was übrig bleibt. Das kommt dann nämlich auch ganz gut hin, weil der Winkel immer gleich bleibt. Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist. “

LUCIA (Grundkurs)

„ Rein gefühlsmäßig würde ich sagen, der Winkel ... hat immer 135 Grad, weil sich dieser Winkel ja auch nicht verändert. Aber mathematisch ist das nicht gerade.

Ja doch, also ich gehe mal davon aus, wenn dieser Winkel immer 90 Grad bleibt, wie ich das ja schon vorhin erklärt habe und das hoffentlich richtig ist, dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte, wenn sich das Dreieck fortbewegt.“

LUCIA (Grundkurs)

- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert;
- Widersprüche zwischen Evidenz und Theorie führen nicht zur Modifikation der Theorie („Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist.“);
- Empirische Argumente wechseln im Verlauf der Problemlösung zu mathematischen Argumenten („dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte“).

KONSTANZE (Grundkurs)

Zu a): „Der Winkel bei C bleibt gleich. Bleibt der gleich? Der Kreis wird weggerollt, deswegen bleibt der Winkel auch gleich.“

Zu b): „Doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden, auch ohne den Radius.“

„Der Winkel bleibt immer gleich, da bin ich mir ganz sicher. Aber den kann man bestimmt berechnen, deswegen kann ich b) nicht ankreuzen.“

Zu c) und d): „Er bleibt gleich. Was mache ich jetzt? Berechnen kann ich ihn nicht. Glaub ich nicht. Ohne irgendwelche Werte.“

KONSTANZE (Grundkurs)

- Hypothesen werden früh angenommen, auch wenn Alternativerklärungen nicht ausgeschlossen sind;
- Plausibilitätsargumente werden wesentlich zur Bearbeitung herangezogen („doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden“);
- Es wird kein angemessener Plan für die Lösung entwickelt;
- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert („der Winkel bleibt gleich, da bin mir ganz sicher“), insbesondere ist die notwendige Exploration der Problemstellung weitestgehend unvollständig.

Weshalb lernen so viele Schulkinder die Mathematik fürchten? Vielleicht teilweise deswegen, weil wir versuchen, ihnen diese formalen Definitionen beizubringen, die entworfen wurden, um zu Bedeutungen zu führen, die so knapp und dünn wie möglich sind. Wir sollten ihnen lieber helfen, in ihren Köpfen widerstandsfähigere Netzwerke zu krüpfen.

Marvin Minsky (1985)

