

# Einzelversuch

## Modellversuch zur Bragg-Reflexion an Kristallen

Heino Hildebrandt, Lars Hoegen, Arne Winterboer

11. November 2004

### 1 Einleitung

In der Petrographie spielt die Untersuchung von kristallinen Strukturen eine große Rolle. Bei der Bestimmung von Gitterabständen in diesen Kristallen kommt häufig ein Verfahren zum Einsatz, das sich die sog. *Bragg-Reflexion* zunutze macht. Mittels Röntgenlicht werden dabei charakteristische Einfallswinkel bestimmt, bei denen die Reflexion maximal wird. Daraus kann man auf den Gitterabstand und die räumliche Struktur von Kristallen rückschließen.

### 2 Theorie

Eine kristalline Struktur wird gekennzeichnet aus der dreidimensional periodischen Anordnung von Gitterpunkten, in der Petrographie Atome oder Moleküle. Richtet man nun ein Bündel monochromatischer elektromagnetischer Strahlung auf eine solche Struktur, so wird diese an den Gitterpunkten gestreut; die Absorption der Strahlung ist meist vernachlässigbar klein. Es kommt zu einer nahezu vollständigen Reflexion der Strahlung, die der optischen Reflexion entspricht, d.h. es gilt insbesondere das Gesetz Einfallswinkel = Ausfallswinkel.

Bei angenommener Reflexion der Strahlung an den Gitterebenen des Kristalls lassen sich aus den sog. *Bragg'schen Reflexionsbedingungen* Einfallswinkel bestimmen, unter denen in Richtung des Ausfallswinkels konstruktive Interferenz zu beobachten ist. Betrachten wir dazu einen Schnitt durch ein quaderförmiges Kristallgitter mit festem Gitterabstand  $d$ , wie in Abbildung 1 dargestellt.

Die konstruktive Interferenz kommt genau dann zustande, wenn der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Reflexionswellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  beträgt. Gemäß den in der Abbildung gesetzten Bezeichnungen ist der Gangunterschied gleich der Differenz  $(x - y)$ . Aus der Trigonometrie folgen die Beziehungen

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{d}{\sin(\alpha)} \quad (1)$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos(2\alpha)x \quad (2)$$

Es ergibt sich daraus

$$x - y = \frac{d}{\sin(\alpha)} (1 - \cos(2\alpha)) = 2d \sin(\alpha) \quad (3)$$

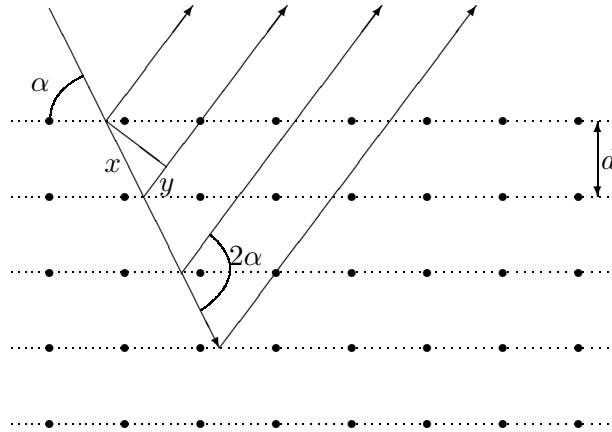


Abbildung 1: Schnittbild durch ein Kristallgitter zur Herleitung der Braggschen Reflexionsbedingungen

Damit erhält man für die Bragg'sche Reflexionsbedingung

$$n\lambda = 2d \sin(\alpha) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Man sieht sofort, daß

$$\lambda \leq \frac{2d}{n} \leq 2d \quad (5)$$

sein muß. Wegen der geringen Gitterebenenabstände in kristallinem Gestein läßt sich die Messung dort nur mit sehr kurzwelliger Röntgenstrahlung durchführen.

Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  findet eine konstruktive Interferenz statt, d.h. unter den zugehörigen Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  beobachtet man in Reflexionsrichtung Maxima mit steigender Ordnung  $n$  der reflektierten Strahlung. Die Intensität der Maxima nimmt mit höherer Ordnung ab.

Als reflektierende Gitternetzebene tritt in einem Kristall jede Schar paralleler Ebenen in Erscheinung, die in regelmäßiger Anordnung mit Gitterpunkten besetzt ist. Untersucht man das Reflexionsverhalten einer Kristallstruktur in Abhängigkeit vom Reflexionswinkel  $\alpha$ , so beobachtet man in der Regel nur die Maxima erster Ordnung, die zu verschiedenen Gitternetzebenenscharen gehören.

### 3 Versuchsdurchführung

Da die Anwendung von Röntgenstrahlung gewisse Risiken birgt und strahlenschutztechnische Maßnahmen bedingt, verwenden wir in diesem Versuch statt dessen Mikrowellenstrahlung mit einer Wellenlänge von etwa 2,8 cm. Wegen Bedingung (5) muß die zu untersuchende Kristallstruktur daher einen entsprechend großen Gitterabstand  $d$  aufweisen.

#### 3.1 Aufbau

Der grundlegende Aufbau besteht aus einem Mikrowellensender und einem Mikrowellenempfänger, die auf zwei Armen einer optischen Bank montiert sind. Die Arme sind drehbar um eine

Plattform gelagert, auf der der zu untersuchende Kristall montiert wird. Die Ein- und Ausfallswinkel lassen sich anhand einer Winkelskala auf dieser Plattform ablesen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

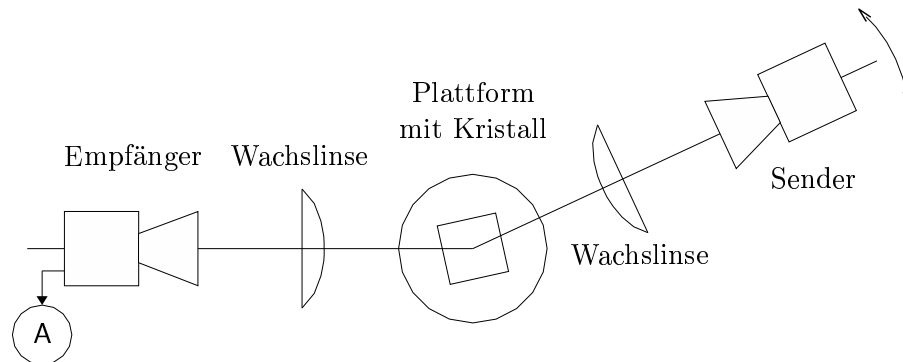


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Der Sender wird mit einer Gleichspannung versorgt und erzeugt eine Mikrowellenstrahlung, die mittels des Gehäusetrichters auf eine Wachslinse gerichtet wird. Die Wachslinse erzeugt aus der punktuellenförmig vom Sender emittierten parallele Strahlenbündel; Wachs hat die für den Wellenlängenbereich gewünschten Brechungsindizes, um damit eine brauchbare Linse zu konstruieren.

Die parallelen Strahlenbündel treffen dann auf eine Kristallstruktur, die drehbar auf der Plattform gelagert ist. Als Kristallstruktur dient ein Polystyrolwürfel, in den in regelmäßigen Abständen von einigen Zentimetern kleine Aluminiumkugeln eingelagert sind. Diese Gitterstruktur modelliert einen symmetrischen Kristall, der die Bedingung (5) erfüllt. Die Gitternetzebenen sind dabei parallel zu den Oberflächen des Würfels angeordnet. Mit Hilfe des drehbaren Armes und der drehbaren Plattform kann daher der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel eingestellt werden.

Die von der Kristallstruktur reflektierten Strahlen werden mit einer zweiten Wachslinse fokussiert und von einem Empfänger aufgefangen, der die Signalstärke über eine elektronische Schaltung in ein Gleichspannungssignal umsetzt, dessen Stromstärke proportional zur Amplitude der empfangenen Strahlung ist. Diese Stromstärke lesen wir auf einem Amperemeter (A) ab.

## 3.2 Vorversuche

### 3.2.1 Bestimmung der Wellenlänge

Zunächst müssen wir die Wellenlänge der vom Sender emittierten Strahlung bestimmen. Da diese im Bereich einiger Zentimeter liegt, können wir sie direkt mit dem Empfänger vermessen. Dazu wird der Sender direkt auf den Empfänger gerichtet und das Ausgangssignal des Empfängers wird auf einem Oszilloskop zur Darstellung gebracht.

Variiert man nun den Abstand zwischen Sender und Empfänger, beobachtet man eine periodische Schwankung des Empfängersignals; der Sender emittiert offenbar eine stehende Welle, deren Wellenbäuche und Wellenknoten man mit dem Empfänger durchläuft.

Wir haben den Abstand zwischen den Positionen des Empfängers vermessen, zwischen denen zehn mal ein Maximum der Empfängerstromstärke zu beobachten war. Bei zwei Mes-

sungen erhielten wir  $\Delta s_1 = 28,45 \pm 0,05$  cm und  $\Delta s_2 = 28,60 \pm 0,05$  cm, woraus sich eine mittlere Wellenlänge von  $\lambda = 2,8525 \pm 0,05$  cm ergibt.

### 3.2.2 Polarisierung der verwendeten Strahlung

Die Bragg'schen Reflexionsbedingungen fordern eine konstruktive Interferenz der elektromagnetischen Wellen. Diese tritt sehr deutlich bei polarisierter Strahlung zutage, da dort keine Kugelwellen-Effekte zu beobachten sind. Wir untersuchten also die Mikrowellenstrahlung mit Hilfe eines einfachen Gitters aus parallelen Stahlstäben auf Interferenz.

Das Gitter brachten wir zwischen Sender und Empfänger und drehten es, um Maximum und Minimum der Empfängerstromstärke zu ermitteln. Ein Minimum war zu beobachten, als die Stäbe senkrecht zu der Achse der optischen Bänke ausgerichtet waren, ein Maximum, als die Stäbe waagrecht zur Achse der optischen Bank standen.

Dieser Befund zeigt an, daß die Polarisationsrichtung der Mikrowellenstrahlung senkrecht auf der Achse der optischen Bank steht.

### 3.2.3 Absorptionsverhalten der verwendeten Materialien

Um zu gewährleisten, daß das Kristallmodell einen realen Kristall möglichst gut abbildet, haben wir einen Polystyrolblock und einen Aluminiumblock auf ihr Absorptionsverhalten hin untersucht. Polystyrol absorbiert Mikrowellenstrahlung überhaupt nicht oder nur in geringem Maße (unterhalb der Nachweisgrenze), Aluminium absorbiert die Strahlung vollständig, auch bei sehr geringer Durchstrahlungsdicke; schon Aluminiumfolie schirmte die Mikrowellenstrahlung vollständig ab.

Wir dürfen demnach annehmen, daß das verwendete Modell die realen Bedingungen hinsichtlich Reflexionsverhalten gut abbildet.

## 3.3 Durchführung

Nach den Vorversuchen haben wir die Empfängerstromstärke in Abhängigkeit des Einfallswinkels  $\alpha$  beobachtet. Dazu haben wir den Winkel zwischen den optischen Bänken auf jeweils  $2\alpha$  eingestellt, um anschließend die Gitterebenen des Kristallmodells im Winkel  $\alpha$  zu ein- und ausfallender Strahlung auszurichten. Die Winkelmessung erfolgte dabei mit einer auf der Plattform angebrachten Winkelskala; die Ablesegenauigkeit betrug  $1^\circ$ , der maximale Einfallswinkel  $\alpha_{\max} = 30^\circ$ . Die Ergebnisse der Messung sind in Tabelle 1 festgehalten.

Die Meßwerte sind in Abbildung 3 grafisch aufgetragen, Abbildung 4 stellt den feiner untersuchten Winkelbereich  $>10^\circ$  vergrößert dar. Auf einen Eintrag von Fehlerbalken wurde wegen der gewählten Achsenskalierung verzichtet.

## 3.4 Auswertung

Man erkennt ein Maxima der beobachteten Empfängerspannung bei Einfallswinkeln  $\alpha_1 = 12 \pm 1^\circ$ ,  $\alpha_2 = 18 \pm 1^\circ$  und  $\alpha_3 = 26 \pm 1^\circ$ . Unter der Annahme, daß wir hier jeweils Maxima der ersten Ordnung beobachtet haben, die bei der Reflexion an verschiedenen Scharen paralleler Gitternetzebenen entstanden, ergeben sich für  $d'$  nach der Formel

$$d' = \frac{n\lambda}{2\sin(\alpha)} \quad (6)$$

Einfallswinkel $\alpha / ^\circ$	Empfängerstrom- stärke $I / \mu\text{A}$	Einfallswinkel $\alpha / ^\circ$	Empfängerstrom- stärke $I / \mu\text{A}$
$0 \pm 1$	$494 \pm 1$	$20 \pm 1$	$7 \pm 1$
$5 \pm 1$	$176 \pm 1$	$21 \pm 1$	$4 \pm 1$
$10 \pm 1$	$54 \pm 1$	$22 \pm 1$	$7 \pm 1$
$11 \pm 1$	$36 \pm 1$	$23 \pm 1$	$0 \pm 1$
$12 \pm 1$	$39 \pm 1$	$24 \pm 1$	$18 \pm 1$
$13 \pm 1$	$31 \pm 1$	$25 \pm 1$	$19 \pm 1$
$14 \pm 1$	$19 \pm 1$	$26 \pm 1$	$32 \pm 1$
$15 \pm 1$	$10 \pm 1$	$27 \pm 1$	$14 \pm 1$
$16 \pm 1$	$1 \pm 1$	$28 \pm 1$	$11 \pm 1$
$17 \pm 1$	$1 \pm 1$	$29 \pm 1$	$8 \pm 1$
$18 \pm 1$	$10 \pm 1$	$30 \pm 1$	$5 \pm 1$
$19 \pm 1$	$1 \pm 1$		

Tabelle 1: Messwerte zur Bragg-Reflexion

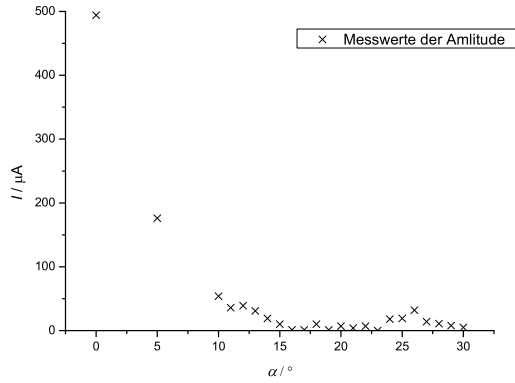


Abbildung 3: Diagramm der Messwerte

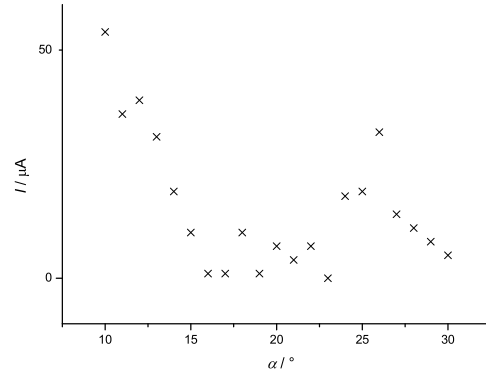


Abbildung 4: Diagramm der Messwerte, feinere Darstellung der Winkel  $> 10^\circ$

mit  $\lambda = 2,8525 \pm 0,05$  cm und  $n = 1$  die Werte  $d'_1 = 6,860 \pm 0,408$  cm,  $d'_2 = 4,615 \pm 0,158$  cm und  $d'_3 = 3,254 \pm 0,057$  cm.

Um von diesen Werten auf einen wahren Gitternetzebenenabstand  $d$  zu kommen, muß man noch die Gittergeometrie berücksichtigen. Abbildung 5 verdeutlicht dies. Aus geometrischen Überlegungen folgt:

$$d_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(d'_1)^2} = 2,169 \pm 0,129 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{1}{5}(d'_2)^2} = 2,064 \pm 0,071 \text{ cm}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(d'_3)^2} = 2,301 \pm 0,040 \text{ cm}$$

Damit ergibt sich ein mittlerer Gitternetzebenenabstand  $\bar{d} = 2,178 \pm 0,080$  cm.

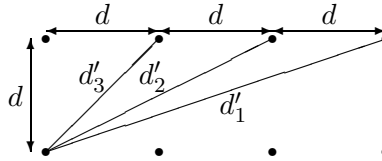


Abbildung 5: Zur Ermittlung des wahren Gitternetzebenenabstands  $d$

### 3.5 Geräteliste

Bei diesem Versuch kamen folgende Geräte zum Einsatz:

Sender: UNILAB Transmitter (Tx), Nr. 044.672

Empfänger: UNILAB Receiver (Rx), Nr. 045.674

Modellkristall: UNILAB "Crystal" (for Bragg scattering), Nr. 141.175

Wachslinsen: UNILAB Wax lens, Nr. 141.179

Plattform: UNILAB Turntable, Nr. 141.171

Spannungsversorgung Sender: PHYWE Universalnetzgerät  $\pm 15\text{ V}$ ,  $\pm 30\text{ V}$

Amperemeter: Universal-Meßgerät KONTRON Intcal DMM 3021

weiteres Equipment: Optische Bänke, Laborkabel, Koaxialkabel Typ RG 58 U

## 4 Didaktische Überlegungen

Wir möchten für diesen Versuch eine ausführlichen Lehrplanentwurf schreiben, den wir nachreichen.

## Literatur

- [1] Hecht, Eugene. *Optik*. Oldenbourg. München u.a., 2001.
- [2] Feynman, Robert B.; Leighton, Richard P.; Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics* – Vol. 2 Mainly electromagnetism and matter. Addison-Wesley. Reading/Mass. u.a., 1963.