Herleitung der Kettenlinie
Lösung zu Aufgabe 8

Lars Hoegen

21. Oktober 2002

Zusammenfassung

Ein Seil, das mit einer beliebigen Kraft vertikal belastet wird, beschreibt eine Kurve, die als sog. Kettenlinie bezeichnet wird. Diese Kraft kann vom Eigengewicht, z.B. Bei Stromleitungen, oder durch hängende Belastung, z.B. bei Seilbrücken, herrühren.
In diesem Artikel möchte ich die Gleichung der Kettenlinie ausführlich herleiten. Ich beginne dabei bei der einfachen Vorstellung eines gewichtslosen, biegeschlaffen Seiles, um diese dann schrittweise zu erweitern. Die gewählte Einteilung in Abschnitte hat den Sinn, daß am Ende eines solchen allgemeine Beziehungen stehen, auf die die folgenden Abschnitte Bezug nehmen.

1 Das gewichtslose, biegeschlaffe Seil

Zunächst betrachte man ein biegeschlaffes Seil, das nicht dehnbar ist. Dieses idealisierte Seil – hier dargestellt durch die Seilkurve – überträgt nur Kräfte entlang seines Verlaufs, nicht hingegen Momente. In der Realität wird dies von nahezu allen dünnen Seilen erfüllt, erst bei einigen Zentimetern Durchmesser muß man die Momente berücksichtigen.

Weiterhin nehme man an, das Seil sei gewichtslos und zwischen zwei beliebigen Punkten gespannt. Es wird von stetig über die gesamte Länge verteilten Kräften belastet. Abbildung 1 zeigt eine Skizze.

Dabei bezeichnet $\Delta\vec{F}$ die Kraft, die in beliebige Richtung am Seilelement Δx angreift. Diese Kraft ergibt sich aus der sog. *spezifischen Längenbelastung* $\vec{q}(x)$:

$$\vec{q}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta x} = \frac{d\vec{F}}{dx} \tag{1}$$

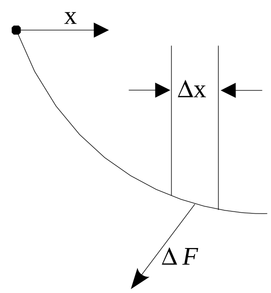

Abbildung 1: Skizze zur Seilkurve bei Belastung durch stet. vert. Kräfte

Diese Kraft spannt das Seil, so daß längs der Seillinie eine Spannkraft $\vec{F}_s(x)$ angreift. Sie hängt von x ab, da an jedem Seilelement die Kraft $\Delta\vec{F}$ die Spannung vergrößert.

Man greife nun ein infetesimal kleines Seilelement über die Strecke Δx heraus und betrachte die angreifenden Kräfte. Da man sich das Stück beliebig klein vorstellen kann, ist die Annahme zulässig, der Seilausschnitt entspreche einer Geraden, wie in Abbildung 2 dargestellt.

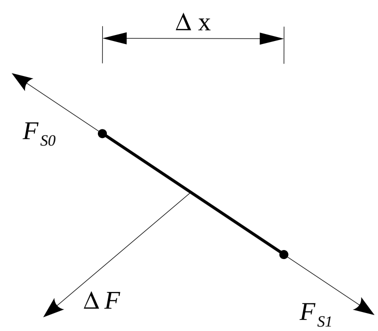

Abbildung 2: Skizze zum Kräftegleichgewicht am Seilkurvenelement

Da es sich bei dem Problem um ein statisches handelt und das Seilelement als Punkt betrachtet werden kann, liefert das Kräftegleichgewicht weitere Aufschlüsse:

$$\vec{F}_{S0} + \vec{F}_{S1} + \Delta\vec{F} = 0 \tag{2}$$

$$mit(1) \Longrightarrow \Delta\vec{F}_s + \vec{q}(x)\Delta x = 0 \tag{3}$$

$$\Delta x \to dx \ : \ \frac{d\vec{F}_s}{dx} + \vec{q}(x) = 0 \tag{4}$$

Gleichung (4) stellt die *allgemeine Seilgleichung für ein belastetes Seil* dar.

2 Seilkraft allgemein

Aus der Gleichung (4) folgt durch Integrieren die Seilkraft:

$$\vec{F}_s(x) = \vec{F}_0 - \int_0^x \vec{q}(x)\,dx \qquad F_0\text{: Integrationskonst.} \tag{5}$$

Das Seil hat an jeder Stelle die Richtung von $\vec{F}_s$. Die Form des Seiles erhält man, indem man die Richtungen aller Linienelemente $\vec{F}_s\Delta s$ aneinanderfügt.

3 Das Seil wird nur von Gewichtskräften belastet

Der häufigste Einsatz von Seilen läßt sich durch ein ebenes Problem beschreiben, bei dem das Seil nur durch Gewichtskräfte belastet wird. Das bedeutet für die spezifische Längebelastung, daß diese immer nur nach unten wirkt. Man lege nun in den Betrachtungspunkt ein Koordinatenkreuz und betrachte die angreifenden Kräfte nach Richtungen getrennt. Abbildung (3) verdeutlicht dies.

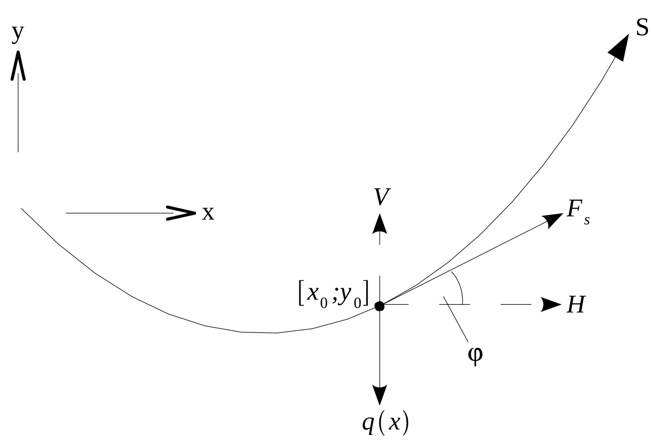

Abbildung 3: Seilkurve eines in der x-y-Ebene betrachteten Seils mit Gewichtsbelastung

Damit haben die beiden angreifenden Kräfte bzgl. $[x_0; y_0]$ die Koordinaten $\vec{F}_s[H; V]$ und $\vec{q}(x)[0; -q(x)]$. Setze diese nun jeweils in die allgemeine Seilgleichung (1) ein:

$$x\text{-Richtung} \quad : \qquad \frac{dH}{dx} = 0 \Rightarrow H = H_0 = konst. \tag{6}$$

$$y\text{-Richtung} \quad : \qquad \frac{dV}{dx} - q(x) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = q(x) \tag{7}$$

$$\Rightarrow V = V_0 + \int_0^x q(x)\,dx$$

Bemerkenswert ist, daß die Horizontalkomponente der Seilkraft über die gesamte Länge konstant ist. Weiterhin gilt:

$$\tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \tag{8}$$

$$\Rightarrow H_0 \frac{dy}{dx} = V \tag{9}$$

$$(9)\,in\,(7) \Rightarrow H_0 \frac{d^2y}{dx^2} = q(x) \tag{10}$$

Gleichung (10) ist die *Differentialgleichung der Seilkurve*. Durch zweimaliges Integrieren erhält man daraus die Seilkurve $y(x)$.

4 Belastung nur durch das Eigengewicht

Mit Hilfe dieser DGL kann man nun im Prinzip jedes belastete Seil untersuchen. Die *Kettenlinie* beschreibt eine Lösung für einen häufig anzutreffenden Spezialfall, nämlich daß das Seil nur von seinem Eigengewicht belastet wird. Um eine Lösung zu erhalten, muß man sich zunächst Gedanken um die dabei auftretende spezifische Längenbelastung machen.

Sei q_0 das Seilgewicht pro Einheitsläne (in N/m) und ds ein wiederum infetesimal kleines, demnach gerades Seilstück. Gleichung (7) kann man geschickt umformen:

$$q(x) = \frac{dV}{dx} = \underbrace{\frac{dV}{ds}}_{(*)} \frac{ds}{dx} = q_0 \frac{ds}{dx} \tag{11}$$

Dabei beschreibt $(*)$ den Anteil, um den die Vertikalkomponente der Seilkraft pro Längeneinheit des Seils entlang desselben vergrößert wird, also gerade das Seilgewicht.

Weiterhin gilt nach Pythagoras $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, da ds, dx und dy nach Annahme ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Es folgt:

$$q(x) = q_0 \frac{ds}{dx} = \frac{q_0}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2} = q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{12}$$

5 Die Kettenlinie

Setze (12) nun in die DGL der Seilkurve (10) ein und löse sie durch zweimaliges Integrieren:

$$H_0 \frac{d^2y}{dx^2} = q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{13}$$

Substituiere $u = \frac{dy}{dx}$, trenne die Variablen und führe die erste Integration aus:

$$\begin{aligned} H_0 \frac{du}{dx} &= q_0 \sqrt{1+u^2} \\ \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= \frac{q_0}{H_0} dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du &= \frac{q_0}{H_0} \int dx \end{aligned}$$

Ein Blick in die Formelsammlung liefert $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \operatorname{ar}\sinh u$ zum Lösen des linken Teils. Führe für den rechten Teil eine Integrationskonstante $\frac{q_0}{H_0} x_0$ ein. Mache anschließend die Substution rückgängig:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du &= \frac{q_0}{H_0} \int dx \\ \operatorname{ar}\sinh u &= \frac{q_0}{H_0} x - \frac{q_0}{H_0} x_0 \\ u &= \sinh \left(\frac{q_0}{H_0} (x - x_0) \right) \\ \frac{dy}{dx} &= \sinh \left(\frac{q_0}{H_0} (x - x_0) \right) \end{aligned}$$

Intergriere nun ein zweites Mal mit Hilfe der Formelsammlung, die besagt, daß $\int \sinh(ax)dx = \frac{1}{a} \cosh(ax)$. Deweiteren sei y_0 wiederum eine Integrationskonstante:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dx} &= \int \sinh \left(\frac{q_0}{H_0} (x - x_0) \right) \\ y(x) &= y_0 + \frac{H_0}{q_0} \cosh \left(\frac{q_0}{H_0} (x - x_0) \right) \end{aligned}$$

Abschließend kann man noch den Koordinatenursprung des betrachten Kräftekoordinatensystems ($[x_0; y_0]$ in Abbildung (3)) mit dem der Seillinie in Deckungsgleichheit bringen, dann ist $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$. Man hat somit abschließend einen allgemeinen Ausdruck der **Kettenlinie**:

$$y(x) = \frac{H_0}{q_0} \cosh \frac{q_0}{H_0} x \tag{14}$$

Nachbemerkungen

Die Funktionen sinh und cosh werden durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dieses Dokument entstand mit LaTeX 2_ε, die Grafiken unter Verwendung von StarOffice™. Die letze Änderung wurde am 21. Oktober 2002 vorgenommen. Die Herleitung erhebt anspruch auf Unvollständigkeit, Fehler sind beabsichtigt.
Ich bitte um Ergänzungen und Anmerkungen auf dem Wege der Elektropost an *Homer.Simpson@atomkraftwerk-springfield.de* . Druck, Vervielfältigung und Veröffentlichung sowie Zitat sind unter Angabe des Autors und der Quelle jederzeit bis auf Widerruf zulässig ;¬).

gez. Lars Hoegen