# Die Irrationalität von $\pi$

Lars Hoegen

7. Januar 2003

*„$\pi$ ist irrational"*

behauptete bereits Aristoteles. Er vertrat die Auffassung, Durchmesser und Umfang eines Kreises seien nicht kommensurabel, ohne dies jedoch beweisen zu können (bzw. müssen). Der erste Beweis dieser Behauptung datiert auf das Jahr 1766 und geht auf den Mathematiker Johann Heinrich Lambert zurück.

Der hier gezeigte Beweis basiert auf einer Arbeit von Ivan Niven, der 1947 einen Beweis erbrachte, der nur elementare Analysis benötigt. Dazu sei zunächst ein Lemma betrachtet, welches im nachfolgenden Beweis Verwendung findet.

## Lemma

Für ein festes $n \geq 1$ sei

$$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \quad . \tag{1}$$

**Behauptung:** Diese Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Die Funktion $f(x)$ ist ein Polynom der Form $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, wobei die Koeffizienten $c_i$ ganze Zahlen sind.

(ii) Für $0 < x < 1$ ist $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

(iii) Die Werte der Ableitungen $f^{(k)}(0)$ und $f^{(k)}(1)$ sind für alle $k \geq 0$ ganze Zahlen.

**Beweis:**

ad (i): Man kann $f(x)$ mit Hilfe der Binomischen Formel umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-x)^k \\ &= \frac{1}{n!}x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n+k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} \underbrace{\overbrace{\binom{n}{i-n}}^{\in\mathbb{Z}} \overbrace{(-1)^{i-n}}^{\in\mathbb{Z}}}_{=:c_i} x^i \end{aligned}$$

ad (ii): Für $0 < x < 1$ ist $x^n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ebenso ist $(1-x)^n < 1$, da $(1-x) < 1$. Weiterhin ist $0 < f(x)$ (trivial, da $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}$). Damit folgt die Behauptung.

ad (iii): Die Ableitung der Funktion $f(x)$ (dargestellt als Polynom) läßt sich allgemein angeben als

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} \frac{i!}{(i-k)!} c_i x^{i-k} \quad .$$

- Betrachte zunächst nur $f^{(k)}(0)$ und unterscheide die Fälle $k < n$, $n \leq k \leq 2n$ und $2n < k$:
  - Im Bereich $k < n$ enthalten alle Summanden der Ableitung noch eine Potenz der Variable $x$. Da $x = 0$, ist die Summe gleich Null, d.h.
    $$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k < n \quad .$$
  - Unter der Vorraussetzung $n \leq k \leq 2n$ fällt im $k$-ten Summanden die Variable $x$ weg, übrig bleibt der Ausdruck $k!\, c_k$. Alle anderen Summanden fallen bereits durch das $k$-fache Ableiten oder dadurch zu Null weg, daß sie noch eine Potenz von $x$ enthalten.
    Demnach ergibt sich
    $$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \quad \forall\, n \leq k \leq 2n \quad .$$
  - Im Falle $2n < k$ sind alle Summanden bereits durch das $2n$-fache Ableiten zu Null weggefallen:
    $$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, 2n < k \quad .$$

  *Resümee:* $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, k \geq 0$

- $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, k \geq 0$ folgt aus $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, k \geq 0$, denn:
  - Es ist $f(x) = f(1-x)$, da:
    $$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x)$$
  - Bei der Ableitung ergibt sich nach der Kettenregel:
    $$\begin{aligned} f'(x) &= f'(1-x)(-1) \\ f''(x) &= (-1)f''(1-x)(-1) \\ f'''(x) &= (-1)(-1)f'''(1-x)(-1) \\ &\vdots \end{aligned}$$
  - Daraus läßt sich allgemein folgern:
    $$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$$
  - Speziell für $x = 1$:
    $$f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0) \quad \in \mathbb{Z}\, \forall\, k \geq 0$$

## Satz: Die Irrationalität von $\pi^2$

**Behauptung:** $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$

**Beweis:**

[1] *Annahme:* Sei $\pi^2 = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

[2] Setze

$$\begin{aligned} F(x) \quad := \quad & b^n \Big(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots \\ & + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) \end{aligned}$$

mit $f(x)$ (und festem $n$) wie in (1) definiert.

[3] Nach Lemma (iii) sind F(0) und F(1) ganze Zahlen.

[4] Weiterhin erfüllt $F''(x)$ die Bedingung

$$F''(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x) \quad , \tag{2}$$

denn:

$$\begin{aligned} F''(x) \quad = \quad & b^n \Big(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - \cdots \\ & + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) \\ = \quad & b^n \Big(-\pi^{2n+2} f(x) + \pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) \\ & + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) + \pi^{2n+2} f(x)\Big) \\ = \quad & (-\pi^2) b^n \Big(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots \\ & + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) + b^n \pi^{2n+2} f(x) \\ = \quad & -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x) \end{aligned}$$

[5] Betrachte nun

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right] \\ & \quad = \quad [F''(x)\sin(\pi x) + F'(x)\pi\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) \\ & \qquad\quad + \pi F(x)\pi\sin(\pi x)] \\ & \quad = \quad \big[F''(x) + \pi^2 F(x)\big]\sin(\pi x) \end{aligned} \tag{3}$$

Unter Verwendung von (2) ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right] \\ & \quad = \quad b^n \pi^{2n+2} f(x)\sin(\pi x) \\ & \quad = \quad b^n \pi^2 \pi^{2n} f(x)\sin(\pi x) \\ & \quad = \quad \pi^2 a^n f(x)\sin(\pi x) \end{aligned} \tag{4}$$

[6] Setze

$$N := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x) \, dx \tag{5}$$

Die Stammfunktion zur Berechnung dieses Integrals ergibt sich aus (4):

$$\begin{aligned} N &= \left[ \frac{1}{\pi} F'(x) \sin(\pi x) - F(x) \cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= F(0) + F(1) \end{aligned}$$

Wie unter [3] festgestellt, ist also $N \in \mathbb{Z}$.

[7] $N$ läßt sich mit mit Lemma (ii) nach oben abschätzen:

$$N := \pi \int_0^1 a^n \, f(x) \, \sin(\pi x) \, dx < \pi \int_0^1 a^n \, \frac{1}{n!} \, 1 \, dx = \frac{\pi a^n}{n!} \tag{6}$$

[8] Weiterhin ist $N$ in diesem Fall positiv, da das Integral über eine positive Funktion definiert wurde.

[9] Wähle nun ein $n$ so, daß

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1 \quad . \tag{7}$$

Ein solches existiert, denn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($= e^a$ nach Def.) konvergiert, zu zeigen mit dem Quotientenkriterium. Die Analysis besagt nun, daß $\frac{a^n}{n!}$ Nullfolge sein muß. Demzufolge geht auch $\pi \frac{a^n}{n!}$ gegen Null, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \, \forall \, n \geq n_0 \; : \; \frac{\pi a^n}{n!} < \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon = 1$.

[10] Aus (6) und (7) folgt:

$$0 < N < \frac{\pi a^n}{n!} < 1 \quad , \tag{8}$$

was im Widerspruch zu der Ausage [6] steht.

Die Aussage [6] basiert auf der Annahme, daß $a \in \mathbb{N}$ *und* $b \in \mathbb{N}$ (vgl. [1]). Damit muss zumindest entweder $a \notin \mathbb{N}$ oder $b \notin \mathbb{N}$ sein, d.h. $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$. *q.e.d.*

## Satz: Die Irrationalität von $\pi$

**Behauptung:** $\pi \notin \mathbb{Q}$

**indirekter Beweis:** Angenommen $\pi \in \mathbb{Q}$, dann wäre auch $\pi^2 \in \mathbb{Q}$, was nach oben gezeigtem Satz eine falsche Aussage ist. Demzufolge muß auch $\pi$ irrational sein. *q.e.d.*

# Literatur

[1] Konrad KÖNIGSBERGER. *Analysis*. 1. Auflage. Springer Berlin [u.a.], 1990. Seite 207.

[2] Martin AIGNER, Günter M. ZIEGLER, Karl H. HOFMANN. *Das Buch der Beweise*. Springer, Berlin [u.a.] 2002. Seiten 33-35