

Mathematische Modellierung

Lösungen zum 1. Übungsblatt

Klaus G. Blümel

Lars Hoegen

26. Oktober 2005

Aufgabe 1

(a)

Der Rauminhalt von einem Kubikmeter entspricht gerade 1000 Litern, d.h. $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$. Rechne zunächst 1 m^3 in cm^3 um. Ein Meter entspricht dabei 100 Zentimetern, d.h. $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$.

$$1 \text{ m}^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = 10^{(2 \cdot 3)} \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$$

Da $1 \text{ m}^3 = 1000$ Liter, muß man nun noch durch $1000 = 10^3$ teilen, d.h.

$$\frac{10^6 \text{ cm}^3}{10^3 \text{ l}} = 10^6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^3}{\text{l}} = 10^{(6-3)} \frac{\text{cm}^3}{\text{l}} = 10^3 \frac{\text{cm}^3}{\text{l}}$$

Ein Liter entspricht also dem Rauminhalt 1000 cm^3 .

(b)

Betrachte zunächst, wieviel ein Dezimeter in Kilometer ist. Wir wissen, daß $10 \text{ dm} = 1 \text{ m}$ und daß $1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$. Es sind also $10 \cdot 10^3 \text{ dm} = 10^{1+3} \text{ dm} = 10^4 \text{ dm} = 1 \text{ km}$ bzw. $1 \text{ dm} = \frac{1}{10^4} \text{ km} = 10^{-4} \text{ km}$.

Damit entspricht $1 \text{ dm}^2 = (10^{-4} \text{ km})^2 = 10^{(-4) \cdot 2} \text{ km}^2 = 10^{-8} \text{ km}^2$.

(c)

Betrachte zunächst, wieviel ein Millimeter in Kilometer ist. Wir wissen, daß $1000 \text{ mm} = 10^3 \text{ mm} = 1 \text{ m}$ und daß $1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$. Es sind also $10^3 \cdot 10^3 \text{ mm} = 10^{3+3} \text{ mm} = 10^6 \text{ mm} = 1 \text{ km}$ bzw. $1 \text{ mm} = \frac{1}{10^6} \text{ km} = 10^{-6} \text{ km}$.

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 0,5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} \text{ km} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ km}$. Berechne Umfang U und Fläche A nach den bekannten Formeln:

$$U = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ km} = 10 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ km} = \pi \cdot 10^{-6} \text{ km} = 3,142 \cdot 10^{-6} \text{ km}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-7} \text{ km})^2 = \pi \cdot 25 \cdot 10^{-14} \text{ km}^2 = 78,540 \cdot 10^{-14} \text{ km}^2$$

(d)

Wir wissen, daß die Bezeichnung μ für den Faktor 10^{-6} steht, d.h. $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ bzw. $10^6 \mu\text{m} = 1 \text{ m}$.

Der Radius des Kreises mit einer Fläche von $A = 10 \text{ m}^2 = 10 \cdot (10^6 \mu\text{m})^2 = 10^{13} \mu\text{m}^2$ ergibt sich durch Umformen der in (c) genannten Flächengleichung:

$$A = \pi r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{10^{13} \mu\text{m}^2}{\pi}} = \sqrt{3,183 \cdot 10^{12} \mu\text{m}^2} = 1,784 \cdot 10^6 \mu\text{m}$$

(e)

Zur Lösung dieser Aufgabe sind zwei Umrechnungen nötig. Zunächst muß die *Länge* umgerechnet werden. Wir wissen, daß $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ bzw. $10^{10} \text{ \AA} = 1 \text{ m}$ und damit $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^3 \cdot 10^{10} \text{ \AA} = 10^{13} \text{ \AA}$. Für die *Zeit* gilt: Eine Woche entspricht $7 \cdot 24 = 168$ Stunden bzw. eine Stunde entspricht $1/168$ Woche (in Formeln ausgedrückt: $1 \text{ h} = \frac{1}{168} \text{ w}$).

Setze nun beides in die Formel ein und löse auf:

$$60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{10^{13} \text{ \AA}}{\frac{1}{168} \text{ w}} = 60 \cdot 10^{13} \cdot 168 \frac{\text{ \AA}}{\text{w}} = 1,008 \cdot 10^{17} \frac{\text{ \AA}}{\text{w}}$$

Das Auto bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit von $1,008 \cdot 10^{17} \text{ \AA}$ pro Woche.

Aufgabe 2

Wir möchten die gegebenen Werte durch eine Kosinusfunktion approximieren. Betrachte dazu die einfache Kosinusfunktion $E(t) = \cos(t)$. Diese wird in mehreren Schritten an die gegebenen Werte angepaßt:

1. *Skalierung des Wertebereiches auf das Intervall $[0,1]$* : Der Wertebereich der Kosinusfunktion liegt normalerweise im Intervall $[0, 2\pi]$, sie verhält sich zu diesem Intervall periodisch. Um den Wertebereich auf $[0,1]$ zu skalieren, muß die Variable der Funktion mit 2π multipliziert werden.

$$E(t) = \cos(2\pi t) \tag{1}$$

2. *Skalierung des Wertebereiches auf das Intervall $[0,365]$* : Da die gegebenen Werte den Verlauf der Tagesmittelwerte der Sonneneinstrahlung über ein Jahr beschreiben, muß der Wertebereich der Funktion auf $[0,365]$ entsprechend 365 Tagen im Jahr erweitert werden. Dies erreicht man durch Division des Kosinus-Arguments mit 365:

$$E(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{365 \text{ d}}\right) \tag{2}$$

3. *Anpassung des Funktionsmaximums an das Einstrahlungsmaximum:* Die Kosinuskfunktion aus Gleichung (2) hat ihr Maximum bei 0. Das Einstrahlungsmaximum liegt aber am 21. Juni vor, also am 172. Tag. Um das Maximum der approximierenden Funktion hierher zu verschieben, wird von der Variable der Wert 172 subtrahiert:

$$E(t) = \cos\left(\frac{2\pi(t - 172 \text{ d})}{365 \text{ d}}\right) \quad (3)$$

4. *Anpassung des Bildbereichbreite an den Wertebereich der Messwerte:* Der Bildbereich der Kosinusfunktion aus Gleichung (3) liegt im Intervall $[-1,1]$, die Messwerte liegen hingegen im Intervall $[22.01, 298.54]$. Das Intervall der Messwerte hat eine Breite von $\Delta E = 276.53 \text{ W/m}^2$. Die Kosinusfunktion hat eine Amplitude, die der halben Intervallbreite des Wertebereiches entspricht. Diese kann durch einen Faktor gedehnt oder gestaucht werden. Um nun die gewünschte Anpassung des Bildbereiches zu erreichen, strecken wir die Amplitude durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}\Delta E$:

$$E(t) = 138.27 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos\left(\frac{2\pi(t - 172 \text{ d})}{365 \text{ d}}\right) \quad (4)$$

5. *Anpassung des Bildbereiches an den Wertebereich der Messwerte:* Die Kosinusfunktion (4) liegt noch symmetrisch um die Abszisse bzw. um 0. Der Wertebereich der Messwerte hingegen liegt symmetrisch um den Mittelwert $\bar{E} = 162.59 \text{ W/m}^2$. Um die Funktion an diesen Wertebereich anzupassen, „heben“ wir diese mittels Addition des Mittelwertes $\bar{E}$ an:

$$E(t) = 138.27 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos\left(\frac{2\pi(t - 172 \text{ d})}{365 \text{ d}}\right) + 162.59 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (5)$$

Mit Gleichung (5) haben wir die gewünschte Approximation gefunden, wie die Abbildung 1 zeigt.

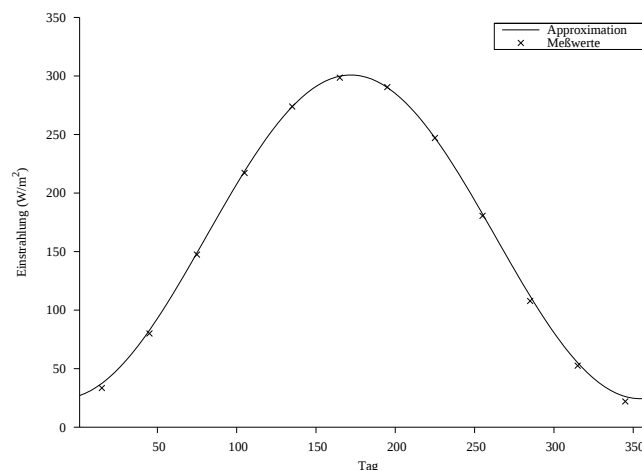


Abbildung 1: Diagramm der Messwerte für die mittlere Sonneneinstrahlung über die Tage des Jahres mit approximierter Funktion $E(t)$ gemäß Gleichung (5)

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde für die Summe der Abstandsquadrate die Formel

$$Q(m, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - mt_i - b]^2 \quad (6)$$

hergeleitet.¹ Die Summe wird gerade dann minimal, wenn der Gradient von $Q(m, b)$ gleich Null ist. Bilde daher die partiellen Ableitungen nach m und b mittels der Kettenregel und setze diese gleich Null:

$$\frac{\partial Q(m, b)}{\partial m} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - mt_i - b)(-t_i)] = -2 \sum_{i=1}^n [y_i t_i - mt_i^2 - bt_i] \stackrel{!}{=} 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q(m, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - mt_i - b)(-1)] = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - mt_i - b] \stackrel{!}{=} 0 \quad (8)$$

Gleichung (8) kann man nun umformen, um einen Ausdruck für b zu erhalten. Dabei machen wir uns zunutze, daß b und m nicht vom Laufindex abhängig sind.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \overbrace{[y_i]}^{=:Y} - m \sum_{i=1}^n \overbrace{[t_i]}^{=:T} - \sum_{i=1}^n [b] \\ \Leftrightarrow nb &= Y - mT \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{n}(Y - mT) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow b = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i]}_{=: \bar{y}} - m \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [t_i]}_{=: \bar{t}} = \bar{y} - m\bar{t} \quad (10)$$

Setzt man nun Gleichung (9) in (7) ein und formt um, erhält man einen Ausdruck für m :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \left[y_i t_i - mt_i^2 - \frac{1}{n}(Y - mT)t_i \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \left[y_i t_i - mt_i^2 - \frac{1}{n}Y t_i + \frac{1}{n}mT t_i \right] \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n [y_i t_i] - \frac{1}{n}Y \sum_{i=1}^n [t_i] &= m \sum_{i=1}^n [t_i^2] - m \frac{1}{n}T \sum_{i=1}^n [t_i] \\ \Leftrightarrow m &= \frac{n \sum_{i=1}^n [y_i t_i] - TY}{n \sum_{i=1}^n [t_i^2] - TT} \end{aligned} \quad (11)$$

Um einen Ausdruck mit der $\text{Cov}(t, y)$ zu erhalten, setzen wir Gleichung (10) in (7) ein und formen

¹Zur besseren Unterscheidung verwenden wir für die Begrenzung des Terms in der Summe eckige Klammern.

geschickt um²:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n [y_i t_i - m t_i^2 - \bar{y} t_i + m \bar{t} t_i] \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n [y_i t_i] - \bar{y} \sum_{i=1}^n [t_i] &= m \left(\sum_{i=1}^n [t_i^2] - \bar{t} \sum_{i=1}^n [t_i] \right) \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i t_i] - n \bar{y} \bar{t}}{\sum_{i=1}^n [t_i^2] - n \bar{t}^2} \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i t_i] - n \bar{y} \bar{t} - n \bar{y} \bar{t} + n \bar{y} \bar{t}}{\sum_{i=1}^n [t_i^2] - n \bar{t}^2 - n \bar{t}^2 + n \bar{t}^2} \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i t_i] - \bar{y} n \bar{t} - \bar{t} n \bar{y} + n \bar{y} \bar{t}}{\sum_{i=1}^n [t_i^2] - 2 \bar{t} n \bar{t} + n \bar{t}^2} \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i t_i] - \sum_{i=1}^n [\bar{y} t_i] - \sum_{i=1}^n [y_i \bar{t}] + \sum_{i=1}^n [\bar{y} \bar{t}]}{\sum_{i=1}^n [t_i^2] - 2 \bar{t} \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n [\bar{t}^2]} \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i t_i - \bar{y} t_i - y_i \bar{t} + \bar{y} \bar{t}]}{\sum_{i=1}^n [t_i^2 - 2 \bar{t} t_i + \bar{t}^2]} \\
 \Leftrightarrow m &= \frac{\sum_{i=1}^n [(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n [(t_i - \bar{t})^2]} = \frac{\text{Cov}(t, y)}{V(t)} \tag{12}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 4

(a), (b) und (e)

Abbildung 2 zeigt eine Darstellung der gegebenen Einwohnerzahlen über die Jahre mit eingezeichneter Regressionskurve. Die Kurve wurde über das Verfahren der Logarithmierung und anschließender Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen (siehe Aufgabenteil (d)).

Abbildung 3 zeigt eine halblogarithmische Darstellung der gegebenen Einwohnerzahlen mit eingezeichneter Regressionsgerade. Die Gerade wurde über die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt (siehe Aufgabenteil (c)).

(c)

Zunächst haben wir die Werte für die Einwohnerzahlen als $\log_{10}$ ausgedrückt und dann die Methode der kleinsten Quadrate angewendet, um die Regressionsgerade zu ermitteln. Dies ist möglich, da die Darstellung gemäß der Form

$$\log_{10}(\text{Einwohnerzahl}) = m \cdot \text{Jahr} + b \tag{13}$$

²Als Hilfestellung: $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \Leftrightarrow n \bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$ $n \bar{t} = \underbrace{\bar{t} + \bar{t} + \dots + \bar{t}}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{i=1}^n \bar{t}$

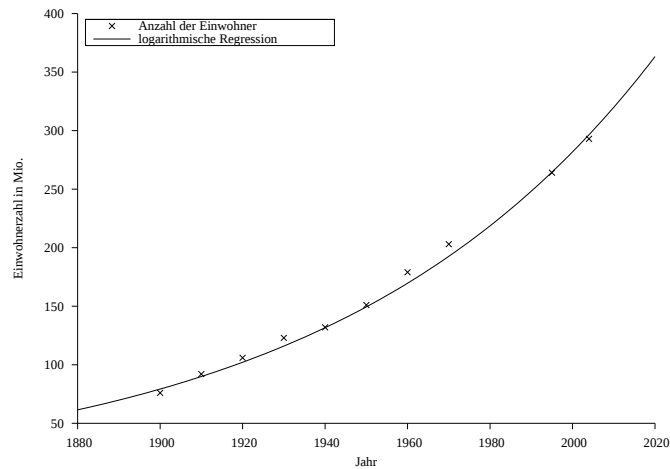


Abbildung 2: Diagramm der Einwohnerzahlenentwicklung der USA im Zeitraum 1900 bis 2004 mit eingezeichneter logarithmischer Regressionskurve gemäß Gleichung (13)

nach Abbildung 3 scheinbar einen linearen Zusammenhang darstellt. Die der Abbildung zugrunde liegenden logarithmierten Werte sind in Tabelle 1 eingetragen.

Jahr	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1995	2004
Einw. in Mio.	76	92	106	123	132	151	179	203	264	293
$\log_{10}$ Einw.	1,881	1,964	2,025	2,09	2,121	2,179	2,253	2,307	2,422	2,467

Tabelle 1: Tabelle der Einwohnerzahlen der USA in verschiedenen Jahren

Setzt man die Werte der Jahre und des $\log_{10}(\text{Einw.})$ in die Gleichungen (11) und (9) ein, so erhält man für die Steigung den Wert $m = 5,51 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Mio. Einw.}}{\text{Jahr}}$ und für den Achsenabschnitt den Wert $b = -8,51 \frac{\text{Mio. Einw.}}{\text{Jahr}}$.

(d)

Die Regresionskurve ergibt sich durch Umkehren des Logarithmierens aus Gleichung (13)

$$\log_{10}(\text{Einwohnerzahl}) = m \cdot \text{Jahr} + b \quad \Leftrightarrow \quad \text{Einwohnerzahl} = 10^{m \cdot \text{Jahr} + b} \quad (14)$$

mit den Werten aus Aufgabenteil (c).

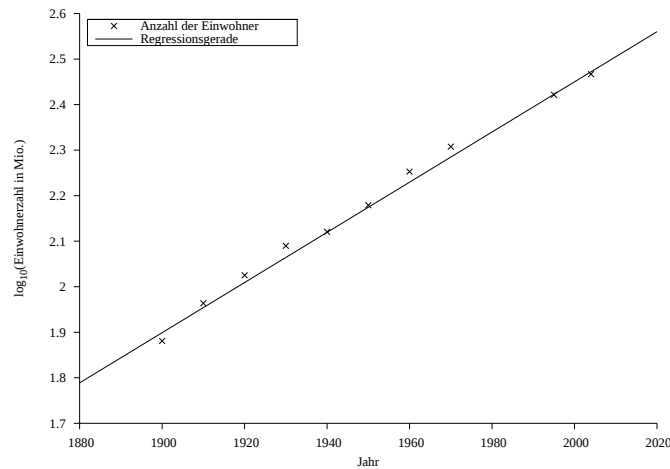


Abbildung 3: Diagramm der Einwohnerzahlenentwicklung der USA im Zeitraum 1900 bis 2004 in halblogarithmischer Darstellung mit eingezeichneter Regressionsgerade gemäß Gleichung (14)

Aufgabe 5

An die gegebene Werte sollen die Funktionen

$$f_1(t, a_0, a_1, b_1) = a_0 + a_1 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + b_1 \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (15)$$

$$f_2(t, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) = a_0 + a_1 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + b_1 \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + a_2 \cdot \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right) + b_2 \cdot \sin\left(4\pi \frac{t}{T}\right) \quad (16)$$

angepasst werden. Da die gegebenen Werte zu äquidistanten Zeitpunkten ermittelt wurden, können wir eine vereinfachte Fourieranalyse durchführen. Die Parameter lassen sich dann gemäß den Formeln

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \cdot \cos\left(2\pi k \frac{t_i}{T}\right) \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sin\left(2\pi k \frac{t_i}{T}\right) \quad (17)$$

ermitteln. Mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms (Open Office) haben wir folgende Parameter berechnet (gerundet):

$$a_0 = 9,458 \text{ h} \quad a_1 = -8,450 \text{ h} \quad a_2 = 2,849 \text{ h} \quad b_1 = -5,333 \text{ h} \quad b_2 = 2,713 \text{ h} \quad (18)$$

In Abbildung 4 sind die Messwerte gegen die Zeit aufgetragen, wobei die Datenpunkte jeweils in der Mitte des zugehörigen Zeitintervalls eingezeichnet sind. Die dargestellten Funktionen f_1 und f_2 haben ebenfalls diese Korrektur erhalten.

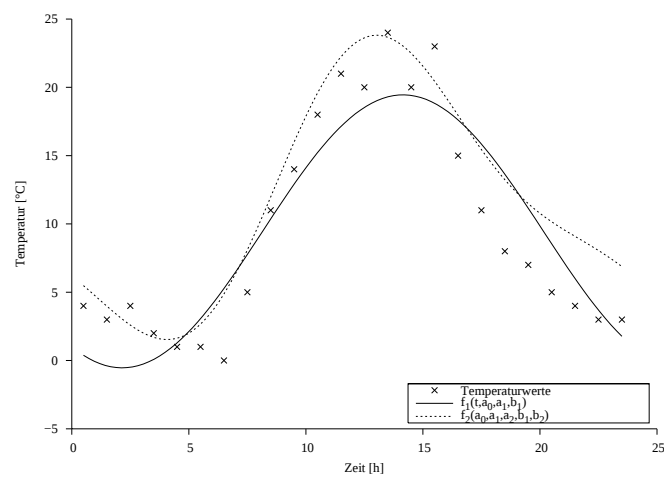


Abbildung 4: Diagramm des Temperaturverlaufs an einem Septembertag (Stundenmittel) mit eingezeichneten Fourier-Approximationen erster (f_1 nach Gl. (15)) und zweiter Ordnung (f_2 nach Gl. (16)) mit den Parametern (18)