Mathematische Modellierung
Lösungen zum 10. Übungsblatt

Klaus G. Blümel   Lars Hoegen

30. Januar 2006

Aufgabe 1

Die Figur (a) zeigt bei einem Skalierungsfaktor $s = 3$ eine selbstähnliche Vielfachheit von $N = 5$ auf, sie hat demnach die fraktale Dimension

$$D_{(a)} = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,465 \; .$$

Die Figur (b) zeigt bei einem Skalierungsfaktor $s = 3$ eine selbstähnliche Vielfachheit von $N = 9$ auf, sie hat demnach die fraktale Dimension

$$D_{(a)} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2 \; ,$$

die der eines einfachen Quadrats entspricht.

Aufgabe 2

Das Ternärsystem[1] ist gekennzeichnet von der Zahl 3 als Basis. Die möglichen Ziffern sind demnach $0, 1$ und 2. Die Umrechnung einer Ternärzahl $(T)_3 = n_a \dots n_2 n_1 n_0, m_1 m_2 \dots m_b$ mit a Stellen vor und b stellen nach dem Komma in das Dezimalsystem erfolgt über die Regel

$$\begin{aligned}(T)_{10} &= n_a \cdot 3^a + \cdots + n_2 \cdot 3^2 + n_1 \cdot 3^1 + n_0 \cdot 3^0, m_1 \cdot 3^{-1} + m_2 \cdot 3^{-2} + \cdots + m_b \cdot 3^{-b} \\ &= \sum_{i=0}^{a} n_i \cdot 3^i + \sum_{j=1}^{b} m_j \cdot 3^{-j}\end{aligned}$$

Insbesondere ist im Ternärsystem jede Zahl durch 3 teilbar, ohne dass die daraus resultierende Zahl unendlich viele Nachkommastellen aufweist. Bei jeder Teilung durch drei entsteht maximal genau eine weitere Nachkommastelle.

Dies wirkt sich in besonderer Weise auf die Cantor-Menge aus. Betrachten wir als Startintervall $[000, 222]_3$ und führen die Cantor-Teilungsanweisung aus, so wird aus dem Intervall der Bereich $[100, 111]_3$ herausgeschnitten. Es verbleiben die Intervalle $[0, 022[_3$ und $[200, 222]_3$.

[1] Wir verwenden zur Unterscheidung der Systeme eine Notation, bei der die Basis der angegebenen Zahl bzw. des angegebenen Intervalls als Index hinter der Klammer angegeben ist. Beispiel: $(222)_3 = (26)_{10}$.

Führen wir nun den zweiten Schritt aus, so werden aus dem Intervall $[0,022[_3$ die beiden Teilintervalle $[000,002[_3$ und $[020,022[_3$. Das zweite Intervall $[200,222]_3$ wird zerschnitten in $[200,202[_3$ und $[220,222]_3$.

Im dritten Schritt entstehen die Intervalle $[000[_3$, $[002[_3$, $[020[_3$, $[022[_3$, $[200[_3$, $[202[_3$, $[220[_3$ und $[222]_3$.

Das Verfahren ließe sich beliebig fortsetzen. Man erkennt, dass durch das Cantorverfahren die Ziffern 1 im Ternärsystem ausgeschnitten werden. Die verbleibenden Intervalle werden durch alle möglichen Kombinationen, die die Ziffern 0 und 2 auf den nach Belieben vorgegebenen Stellen einnehmen können, bestimmt.

Das Chaos-Spiel funktioniert auch im Ternärsystem nach den aus dem Dezimalsystem bekannten Regeln:

1. Wähle ein Intervall $[A, B]_3$.
2. Wähle ein Startpunkt x_0 bei $\frac{2}{3}B$.
3. Entscheide mit der Münze, ob ein Sprung nach links oder ein Sprung nach rechts erfolgen soll.
   (a) Der Sprung nach links erfolgt auf die Position $x_{\text{neu}} = \frac{1}{3}x_{\text{alt}}$.
   Eine Ternärzahl durch 3 zu teilen ist besonders einfach. Die Basis des Systems führt dazu, dass sich alle Stellen einer gegebenen Ternärzahl bei Teilung durch 3 um eine Stelle nach rechts verschieben. Beispiel: $(2012)_3 \div (0010)_3 = (201,2)_3$
   (b) Der Sprung nach rechts erfolgt auf die Position $x_{\text{neu}} = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}x_{\text{alt}}$.
   Die Teilung des Gesamtintervalls durch 3 ist immer möglich, ebenso die Teilung der Strecke bis zur Position x_{alt}. Die Addition erfolgt wie im Dezimalsystem stellenweise mit Übertrag. Das Problem reduziert sich damit auf die Addition in nur einer Stelle:

Rechnung	Übertrag
$2+0=2$	
$2+1=0$	1
$2+2=1$	1
$1+0=1$	
$1+1=2$	
$1+2=1$	1
$0+0=0$	
$0+1=1$	
$0+2=2$	

   Der Übertrag wird zur nächsten Stelle eines Summanden addiert, dann wird die stellenweise Addition fortgesetzt.

Aufgabe 3

Basierend auf dem im Skript [1, Abschnitt 7.2] beschriebenen Chaos-Spiel für die selbstähnliche Farn-Struktur haben wir mit Abbildungsmatrizen in einem SmallBasic-Programm herumexperimentiert und dabei die im Folgenden beschriebenen Strukturen entdeckt. Die Erzeugung beginnt mit einem Startpunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$, danach werden zwei bis fünf Abbildungsvorschriften durchlaufen, mit deren Hilfe neue Punkte generiert werden. Für eine bessere Verteilung der Punkte werden den Vorschriften Ausführungswahrscheinlichkeiten w_i zugewiesen, die bewirken, dass die Abbildung umso häufiger ausgeführt wird, je größer ihr Bild bzw. der Wert ihrer Determinante ist.

Die Burg

Eine Abbildungsvorschrift für die Erzeugung einer „Burg“ wird beschrieben durch das Matrizensystem:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1 = 0,25$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_2 = 0,25$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_3 = 0,16$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_4 = 0,25$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_5 = 0,09$$

Das zugehörige Programm sieht wie folgt aus:

```
'Burg
cls
scale=150
' Startwert
xalt = 1
yalt = 0
' Wahrscheinlichkeiten (Summe=1)
w1=0.25
w2=0.25
w3=0.16
w4=0.25
w5=0.09

FOR i = 1 to 300000
q = rnd
  IF q<w1 THEN
    x = 0.5*xalt
    y = 0.5*yalt
  ELSEIF q<w1+w2 THEN
    x = 0.5*xalt + 2
    y = 0.5*yalt
  ELSEIF q<w1+w2+w3 THEN
    x = 0.4*xalt
    y = 0.4*yalt + 1
  ELSEIF q<w1+w2+w2+w4 THEN
    x = 0.5*xalt + 2
    y = 0.5*yalt + 1
  ELSE
    x = 0.3*xalt
    y = 0.3*yalt + 1
  ENDIF

  pset 700-scale*x,400-scale*y color 0
  xalt=x
  yalt=y
NEXT i
END
```

Es erzeugt die in Abbildung 1 auf Seite 8 dargestellte Figur.

Der Baum

Eine Abbildungsvorschrift für die Erzeugung eines „Baums“ wird beschrieben durch das Matrizensystem:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1 = 0,05$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 & -0,42 \\ 0,42 & 0,42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_2 = 0,4$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,42 \\ -0,42 & 0,42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_3 = 0,4$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_4 = 0,15$$

Das zugehörige Programm sieht wie folgt aus:

```
'Baum
cls
scale=1100
' Startwert
xalt = 1
yalt = 0
' Wahrscheinlichkeiten (Summe=1)
w1=0.05
w2=0.4
w3=0.4
w4=0.15

FOR i = 1 to 300000
q = rnd
  IF q<w1 THEN
    x = 0
    y = 0.5*yalt
  ELSEIF q<w1+w2 THEN
    x = 0.42*xalt - 0.42*yalt
    y = 0.42*xalt + 0.42*yalt + 0.2
  ELSEIF q<w1+w2+w3
    x = 0.42*xalt + 0.42*yalt
    y = - 0.42*xalt + 0.42*yalt + 0.2
  ELSE
    x = 0.1*xalt
    y = 0.1*yalt + 0.2
  ENDIF

  pset 450-scale*x,550-scale*y color 0
  xalt=x
  yalt=y
NEXT i
END
```

Es erzeugt die in Abbildung 2 auf Seite 9 dargestellte Figur.

Der Drache

Eine Abbildungsvorschrift für die Erzeugung einer drachenähnlichen Figur wird beschrieben durch das Matrizensystem:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,088272 & 0,520988 \\ -0,463889 & -0,377778 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,785360 \\ 8,095795 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1 = 0,212527$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,824074 & 0,281482 \\ -0,212346 & 0.864198 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,882290 \\ -0,110607 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_2 = 0,787473$$

Das zugehörige Programm sieht wie folgt aus:

```
cls
scale=50
' Startwert
xalt = 1
yalt = 0
' Wahrscheinlichkeiten (Summe=1)
w1=0.212527
w2=0.787473

FOR i = 1 to 300000
q = rnd
  IF q<w1 THEN
    x = 0.088272*xalt + 0.520988*yalt + 0.785360
    y = - 0.463889*xalt - 0.377778*yalt + 8.095795
  ELSE
    x = 0.824074*xalt + 0.281482*yalt - 1.882290
    y = - 0.212346*xalt + 0.864198*yalt - 0.110607
  ENDIF

  pset 400-scale*x,550-scale*y color 0
  xalt=x
  yalt=y
NEXT i
END
```

Es erzeugt die in Abbildung 3 auf Seite 9 dargestellte Figur.

Das Sierpinski-Dreieck

Eine Abbildungsvorschrift für die Erzeugung eines Sierpinski-Dreiecks wird beschrieben durch das Matrizensystem:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1 = 0,333333$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_2 = 0,333333$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_3 = 0,333333$$

Das zugehörige Programm sieht wie folgt aus:

```
'Sierpinski-Dreieck
cls
scale=5
' Startwert
xalt = 1
yalt = 0
' Wahrscheinlichkeiten (Summe=1)
w1=0.333333
w2=0.333333
w3=0.333333

FOR i = 1 to 300000
q = rnd
  IF q<w1 THEN
    x = 0.5*xalt +1
    y = 0.5*yalt + 1
  ELSEIF q<w1+w2 THEN
    x = 0.5*xalt + 1
```

```
    y = 0.5*yalt + 50
  ELSE
    x = 0.5*xalt + 50
    y = 0.5*yalt + 50
  ENDIF
```

```
    pset 600-scale*x,550-scale*y color 0
    xalt=x
    yalt=y
  NEXT i
  END
```

Es erzeugt die in Abbildung 4 auf Seite 10 dargestellte Figur.

Die Spirale

Eine Abbildungsvorschrift für die Erzeugung einer „Spirale“ wird beschrieben durch das Matrizensystem:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,121212 & 0,257576 \\ 0,151515 & 0,053030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6,721654 \\ 1,377236 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1 = 0,052174$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,181818 & -0,136364 \\ 0,090909 & 0,181818 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6,086107 \\ 1,568035 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_2 = 0,052174$$

$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,787879 & -0,424242 \\ 0,242424 & 0,859894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,758647 \\ 0,895652 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_3 = 0,895652$$

Das zugehörige Programm sieht wie folgt aus:

```
'Spirale
cls
scale=40
' Startwert
xalt = 1
yalt = 0
' Wahrscheinlichkeiten (Summe=1)
w1=0.052174
w2=0.052174
w3=0.895652

FOR i = 1 to 300000
q = rnd
  IF q<w1 THEN
    x = -.121212*xalt - .257576*yalt -6.721654
    y = .151515*xalt +  .053030*yalt + 1.377236
  ELSEIF q<w1+w2 THEN
    x = .181818*xalt -.136364*yalt + 6.086107
    y = .090909*xalt + .181818*yalt + 1.568035
  ELSE
    x = .787879*xalt -.424242*yalt + 1.758647
    y = .242424*xalt + .859894*yalt + 1.408065
  ENDIF

  pset 300-scale*x,500-scale*y color 0
  xalt=x
  yalt=y
NEXT i
END
```

Es erzeugt die in Abbildung 5 auf Seite 10 dargestellte Figur.

Aufgabe 4

Das Chaos-Spiel zur Erzugung von selbstähnlichen Figuren

Das Thema Fraktale als selbstähnliche Figuren kann in der Schule in einer sehr vereinfachten Form schon in Klasse 5 angegangen werden, wenn die SchülerInnen sich mit Abbildungen beschäftigen, die mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden. Natürlich kann an dieser Stelle nicht auf die in Aufgabe 3 verwendete Lineare Algebra als „Gefäß“ für die Abbildungserstellung eingegangen werden. Das rein algorithmische Funktionsprinzip eines Mehrfach-Verkleinerungs-Kopierers (MCRM) dürfte von den SchülerInnen verständlich sein. Man kann am Beispiel des Farnblattes sehr schön zeigen, dass vier relativ einfache Abbildungen (Drehung, Spiegelung, Projektion und Verkleinerung) ausreichen, um komplexe Strukturen zu erzeugen. Als Grundlage für das entstehende Bild würden wir den SchülerInnen allerdings anstatt des Punktes als Element, dass der Abbildung unterworfen wird, ein (winzig kleines) Quadrat verwenden, da in Klasse 5 nur Abbildungen an geometrischen Figuren behandelt werden. Eine Vorstellungen eines Punktes im mathematischen Sinne ist noch nicht vorhanden.

Weitere Anknüpfungspunkte finden sich in Klasse 8 bzw. 9[2], wenn die aus Klasse 5 bekannten geometrischen Abbildungsvorschriften wiederholt und auf Punkte im Koordinatensystem angewendet werden. Hier kann dann der Algorithmus auch tatsächlich auf Punkte angewendet werden.

Die den Programmen zugrunde liegende Matrix-Mathematik ist Stoff der Klasse 10. Die selbstähnlichen Figuren aus Aufgabe 3 stellen hier ein sehr plakatives Beispiel für die Manipulation von Abbildung mit Hilfe von Matrizen dar. Einstieg könnte hier das Sierpinski-Dreieck sein, dass nur aus Streckungs-Matrizen besteht. Man erläutert die drei Vorschriften des Programmes an der Tafel und lässt es anschließend laufen. Eine Steigerung findet sich dann im Baum, der Streckung und Drehung kombiniert. Die Spirale entsteht durch Kombination von Drehung, Scherung und Streckung.

Insgesamt zeigt sich, dass selbstähnliche Figuren gerade wegen der mannigfaltigen Beispiele aus der Natur ein alltagsnahes Phänomen darstellen, das für SchülerInnen verständlich erklärt werden kann, ohne einen allzu großen Ausflug in kompliziertere Mathematik machen zu müssen. Gerade wenn man Programme heranzieht, die das Vergrößern beliebiger Bildteile erlauben, bietet sich in diesem Teilgebiet der Mathematik ein hoch motivierendes Feld für die Verwendung im Unterricht.

Mandelbrot- und Julia-Mengen

Die in den komplexen Zahlen definierten Mandelbrot- und Julia-Mengen bieten sich als Abschluss der Klasse 12 an. Sie verbinden die Konvergenzbetrachtung von Zahlenfolgen vom Beginn der Klasse 12 mit der komplexen Zahlenebene, die im Allgemeinen am Ende der Klasse 12 behandelt werden.[3] Die Mandelbrot- bzw. die Julia-Folge ist sehr einfach und kann mit ausgesuchten Startwerten schon mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder des Taschenrechners auf Konvergenz hin untersucht werden.

[2] das Curriculum lässt gewisse Wahlmöglichkeiten in der Abfolge der Inhalte

[3] Leider wirkt das Zentralabitur mit seiner Schwerpunktsetzung auf die Stoffverteilung der Oberstufe zurück und beim Schwerpunkt Lineare Algebra und analytische Geometrie kann das Themengebiet Analysis, dass auch die komplexen Zahlen umfasst, etwas zu kurz kommen.

Hier würde es sich anbieten, ein Raster von Punkten über die komplexe Zahlenebene zu legen und die Konvergenz dieser Punkte in Gruppen untersuchen zu lassen. Anschließend werden die Punkte zweifarbig in der Gaußschen Zahlenebene eingetragen, je nachdem, ob Beschränktheit vorliegt oder nicht. Diese Vorarbeit führt dann zum computergenerierten Bild der Mandelbrot- oder Julia-Menge.

Das Phänomen der Selbstähnlichkeit ist aus der Definition der Mengen nicht direkt ersichtlich und kann nur über längliche mathematische Untersuchungen begründet werden, die im Allgemeinen das Verständnis von SchülerInnen übersteigen und eher demotivierend wirken. An dieser Stelle würde wir daher auf einen Überraschungseffekt setzen und die Selbstähnlichkeit schlichtweg demonstrieren. Da Mandelbrot- und Julia-Mengen sehr ästhetische Gebilde sind, halten wir sie für einen einprägsamen Abschluss der Oberstufen-Mathematik. Leider mangelt es ihnen an einfach verständlichen natürlichen oder technischen Anwendungen, so dass die Schönheit der Materie als hinreichend motivierend betrachtet werden muss.

Literatur

[1] Cora Kohlmeier. *Einführung in die Mathematische Modellierung*.
Skript zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Modellbildung für das Lehramt an Gymnasien“, gehalten im Wintersemester 2005/06 an der Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg. Eigenverlag am *Institut für Chemie und Biologie des Meeres* (ICBM). 2005.

Abbildungen

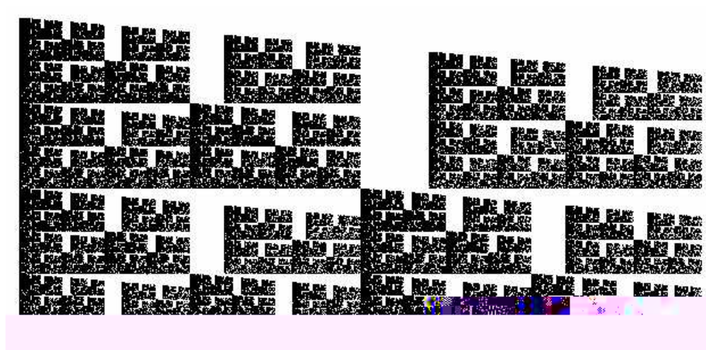

Abbildung 1: Eine „Burg“

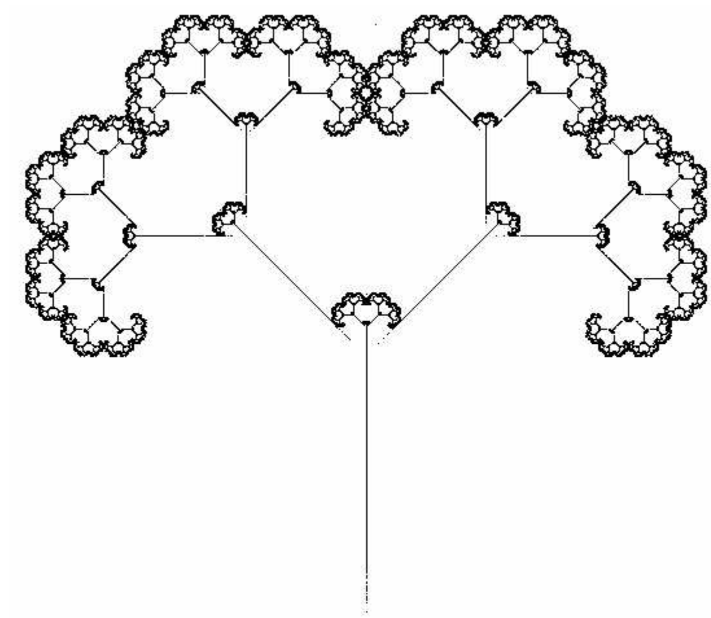

Abbildung 2: Ein „Baum“

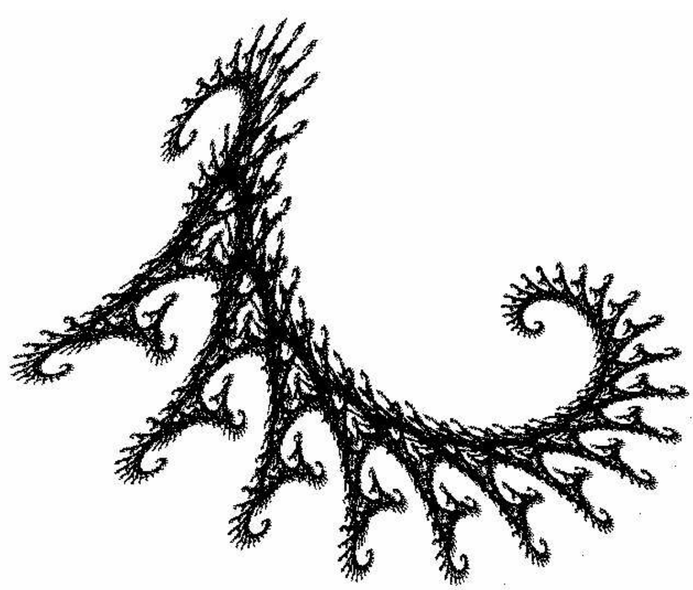

Abbildung 3: Eine drachenähnliche Figur

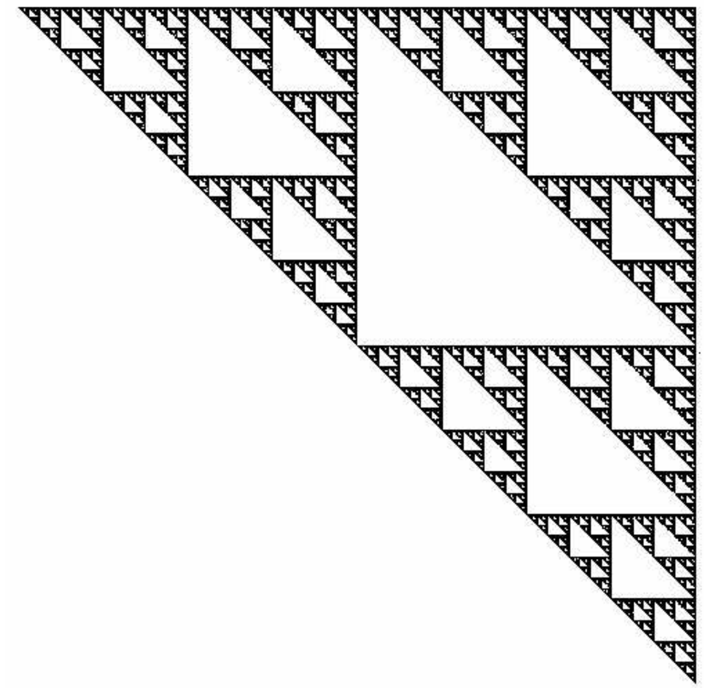

Abbildung 4: Ein Sierpinski-Dreieck

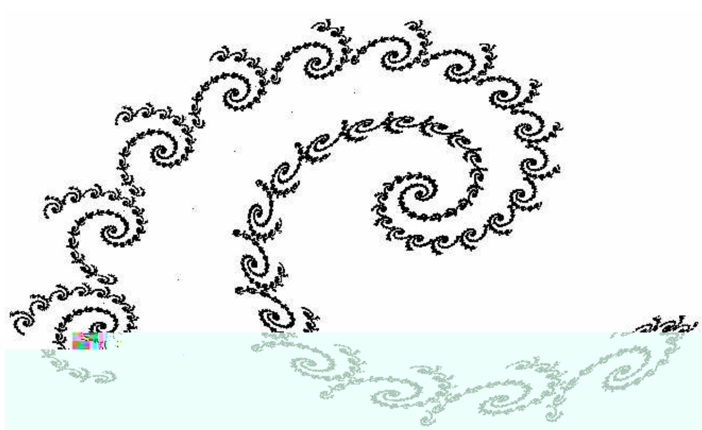

Abbildung 5: Eine „Spirale“