Mathematische Modellierung
Lösungen zum 2. Übungsblatt

Klaus G. Blümel Lars Hoegen

3. November 2005

Lemma 1. Unter Vernachlässigung der Luftreibung beschreibt ein Massepunkt, der im Punkt $(0, 0)$ eines gedachten Koordinatensystems mit der (Anfangs-)Geschwindigkeit v_0 im Winkel α zur x-Richtung geworfen wird, eine Bahnkurve gemäß der Gleichung

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 \tag{1}$$

wobei g die Schwerebeschleunigung ist.

Beweis. Zur Herleitung dieser Beziehung zerlegen wir die Beschleunigung v_0 in zwei Komponenten parallel zu $x-$ und $y-$Richtung. Diese ergeben sich aus trigonometrischen Überlegungen:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \tag{2}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha \tag{3}$$

Nach der Zeit t hat der geworfene Massepunkt in $x-$Richtung die Strecke

$$x(t) = v_0\, t \cos \alpha \tag{4}$$

zurückgelegt. In $y-$Richtung wird die Bewegung von einer Fallbewegung überlagert, die von der Schwerebeschleunigung g herrührt:

$$y(t) = v_0\, t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \tag{5}$$

Stellt man Gleichung (4) nach t um und setzt sie in Gleichung (5) ein, erhält man die Gleichung (1).
q.e.d.

Aufgabe 3

Zur Bestimmung der maximalen Weite des Balls bestimmen wir zunächst seine Wurfzeit t_w, indem wir in Gleichung (5) $y = 0$ setzen:

$$0 = v_0\, t_w \sin \alpha - \frac{g}{2} t_w^2 \tag{6}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $t_w = 0$ (trivial) und $t_w = \frac{2\,v_0 \sin\alpha}{g}$. Setzt man die zweite Lösung in Gleichung (4) ein, erhält man die gesuchte Weite:

$$x = \frac{2\,v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{7}$$

Bei gegebenem Betrag v_0 (in der Aufgabenstellung als v bezeichnet) erreicht der Ball also für $\alpha = 45°$ seine maximale Weite, da die Sinusfunktion bei $\pi/2 \mathrel{\widehat{=}} 90°$ ihr Maximum erreicht. Die auf der Erde maximal erreichbare Weite $x_{\text{max, Erde}}$ beträgt somit

$$x_{\text{max, Erde}} = \frac{v_0^2}{9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \tag{8}$$

Bei diesen Überlegungen wurde die Luftreibung vernachlässigt. Der Ball beschreibt eine Parabelkurve. Mit Luftreibung würde die Parabel im fallenden Ast stärker geneigt sein, d.h. die tatsächliche maximale Weite würde bei einem Winkel $\alpha > 45°$ erreicht.

Aufgabe 1

Die in der Aufgabenstellung dargestellte Situation kann durch die Parabelgleichung (1) beschrieben werden, wenn man $\alpha = 0°$ annimmt (waagerechter Wurf). Die Wurfparabel hat dann nur einen fallenden Ast im vierten Quadranten des gedachten Koordinatensystems.

In diesem Fall vereinfachen sich die Gleichungen (4) und (5) zu:

$$x(t) = v_0\,t \tag{9}$$

$$y(t) = \frac{g}{2} t^2 \tag{10}$$

$g = 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist im geschilderten Fall die Erdbeschleunigung. Hieraus kann man die Zeit bestimmen, die der Kaugummi für die Fallstrecke von 110 m benötigt:

$$110\text{m} = \frac{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\,t^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad t \approx 4,736\,\text{s}$$

In dieser Zeit legt der Kaugummi gemäß Gleichung (9) in $x-$Richtung die Strecke

$$x(4,736\,\text{s}) = \frac{50}{36}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4,736\,\text{s} \approx 6,578\,\text{m}$$

zurück. v_0 war gegeben mit 5 km/h entsprechend $\frac{5000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Das Kaugummi trifft also – unter Vernachlässigung der Luftreibung – nach etwa 4,7 Sekunden in einer Entfernung von etwa 6,6 Metern auf den Erdboden.

Aufgabe 2

Der fliegende Tennsiball unterliegt den Gesetzmäßigkeiten einer Wurfbewegung. Legen wir den die x-Achse eines gedachten Koordinatensystems parallel zum Platzboden und den Ursprung $(0,0)$ in den

Abschußpunkt der Ballmaschine, so muß die Wurfparabel mit ihrem absteigenden Ast zwischen den Punkten $(11.885\,\mathrm{m}, 0.41\,\mathrm{m})$, also der Netzkante, und $(23.77\,\mathrm{m}, -0.5\,\mathrm{m})$, also der Grundlinie, liegen (siehe Abbildung 1). Wir bestimmen nun die jeweiligen Fallbeschleunigungen g, die diese beiden Randbedingungen erfüllen.

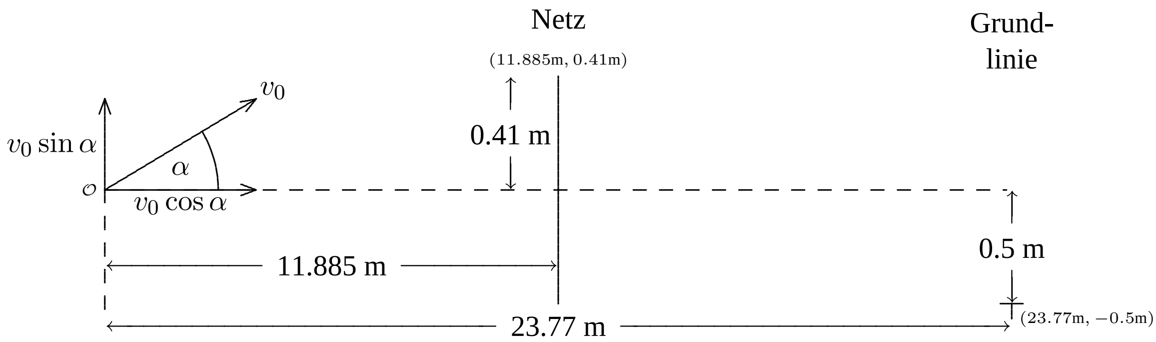

Abbildung 1: Zur Erläuterung des gewählten Koordinatensystems

Löse dazu Gleichung (1) nach g auf:

$$
\begin{aligned}
y &= x\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 \\
\Leftrightarrow \quad x\tan\alpha - y &= \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 \\
\Leftrightarrow \quad (2\,v_0^2\cos^2\alpha)(x\tan\alpha - y) &= gx^2 \\
\Leftrightarrow \quad (2\,v_0^2\cos^2\alpha)\frac{(x\tan\alpha - y)}{x^2} &= g
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Setzt man nun die gegeben Parameter ein, erhält man für g einen Maximalwert g_{max}, bei dem der Ball gerade noch die Netzkante überfliegt, und einen Minimalwert g_{min}, unterhalb dessen der Ball über die gegnerische Grundlinie hinaus fliegen würde. Es ergeben sich die Werte

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{max}} &= \left(2\cdot\left(16\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot\cos^2 30^\circ\right)\cdot\frac{(11.885\,\mathrm{m}\cdot\tan 30^\circ - 0.41\,\mathrm{m})}{(11.885\,\mathrm{m})^2} \\
&= 19.03\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{min}} &= \left(2\cdot\left(16\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot\cos^2 30^\circ\right)\cdot\frac{(23.77\,\mathrm{m}\cdot\tan 30^\circ + 0,5\,\mathrm{m})}{(11.885\,\mathrm{m})^2} \\
&= 10.489\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Die Bedingung $10.489\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} < g < 19.03\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erfüllt von den gegebenen Planeten nur der Saturn, d.h. nur dieser kommt als Markt für die defekte Ballmaschine in Frage.

Aufgabe 4

Um die Einhüllende der gegebenen nicht skalierten Bahngleichung (1) der Wurfparabel zu berechnen, muß man diese, wie im Skript [1] begründet, partiell nach α ableiten und die Ableitung gleich Null setzen.

$$
\begin{aligned}
&& \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}\, x - \frac{g}{2v_0^2} \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}\, x^2 \stackrel{!}{=} 0 && (14)\\
\Leftrightarrow && 0 &= \frac{1}{\cos^2} \left(x - \frac{g \tan \alpha}{v_0}\, x^2 \right) &&\\
\Leftrightarrow && 0 &= x - \frac{g \tan \alpha}{v_0}\, x^2 &&\\
\Leftrightarrow && \tan \alpha &= \frac{v_0}{g\, x} && (15)
\end{aligned}
$$

Unter Zuhilfenahme der Beziehung $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$ können wir nun (15) in (1) einsetzen und erhalten die Gleichung der Einhüllenden:

$$
\begin{aligned}
y_E(x, v, g) &= \frac{v_0}{g\, x}\, x - \frac{g}{2v_0^2}\, x^2 \left(1 + \frac{v_0^2}{g^2\, x^2} \right) \\
&= \left(v_0 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{g} - \frac{g}{2v_0^2}\, x^2 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Für die graphische Darstellung verschiedener Wurfparabeln und deren Einhüllender muß noch v_0 und g festgestezt werden. Diese sind willkürlich wählbar, da unabhängig voneinander. Eine höhrere Anfangsgeschwindigkeit v_0 führt zu längeren und höheren Wurfparabeln, eine höhere Fallbeschleunigung g verkürzt die Parabelbögen. Wähle aus Plausibilitätsgründen $v_0 = 1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $g = 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Abbildung 2 zeigt verschiedene Bahngleichungen mit der zuhörigen Einhüllenden.

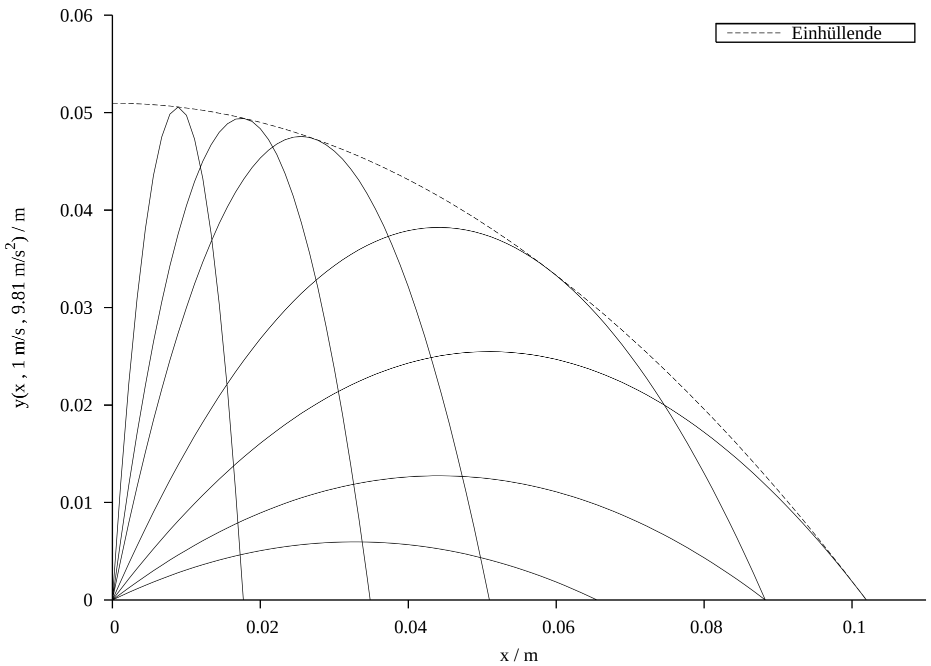

Abbildung 2: Wurfparabeln zu verschiedenen Abwurfwinkeln α mit zugehöriger Einhüllender für $v_0 = 1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $g = 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Literatur

[1] Cora Kohlmeier. *Einführung in die Mathematische Modellierung*.
Skript zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Modellbildung für das Leharmt an Gymnasien“, gehalten im Wintersemester 2005/06 an der Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg. Eigenverlag am *Institut für Chemie und Biologie des Meeres* (ICBM). 2005.