

Mathematische Modellierung

Lösungen zum 3. Übungsblatt

Klaus G. Blümel

Lars Hoegen

12. November 2005

Aufgabe 1

(a)

Die Schadstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt $s_0 = 0,8\% = 8\text{‰} = 0,008$. Es werden pro Monat 5% der jeweiligen Konzentration abgebaut, d.h. es verbleiben $95\% = 0,95$ der Konzentration des Vormonats. Der Abbauprozess kann also rekursiv modelliert werden:

$$s_0 = 0,008$$

$$s_m = 0,95 \cdot s_{m-1}$$

s_m gibt die Konzentration im Monat $m \in \mathbb{N}_0$ an. Man kann diese Form in eine explizite Darstellung bringen:

$$s_m = s_0 \cdot 0,95^{m \cdot \frac{1}{\text{Monate}}} \quad (1)$$

Die Gleichheit der beiden Formen kann mittels Induktion nach s_m gezeigt werden.

i. Die Schadstoffkonzentration nach 3 Monaten beträgt

$$s_3 = 0,008 \cdot 0,95^3 \approx 6,859 \cdot 10^{-3}$$

also etwa 6,86‰. Analog berechnet sich die Konzentration nach 5 Monaten zu $s_5 \approx 6,19\text{‰}$ und nach 2 Jahren zu etwa $s_{24} \approx 2,34\text{‰}$.

ii. Um zu bestimmen, zu welchem Zeitpunkt eine gegebene Schadstoffkonzentration unterschritten wird, muß man Gleichung (1) nach m auflösen¹:

$$\begin{aligned} s_m &= s_0 \cdot 0,95^m \\ \Leftrightarrow \frac{s_m}{s_0} &= 0,95^{m \cdot \frac{1}{\text{Monate}}} \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{s_m}{s_0}\right) &= \log\left(0,95^{m \cdot \frac{1}{\text{Monate}}}\right) \end{aligned}$$

¹Da die Monate eine diskrete Größe $m \in \mathbb{N}_0$ darstellen, müßte man am Ende strenggenommen noch $m_{\text{gesucht}} = m + 1 - (m \bmod 1)$ berechnen, um den jeweils nächst höheren Monat als Ergebnis zu erhalten.

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{s_m}{s_0}\right) = m \frac{1}{\text{Monate}} \cdot \log 0,95$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log\left(\frac{s_m}{s_0}\right)}{\log 0,95} \text{ Monate} = m \quad (2)$$

Damit berechnet sich der Zeitpunkt, zu dem die Konzentration 1‰ unterschreitet, zu

$$m_{1‰} = \frac{\log\left(\frac{0,001}{0,008}\right)}{\log 0,95} \text{ Monate} = 40,540 \text{ Monate}$$

Die Konzentration sinkt also im 41. Monat unter 1‰.

iii. Gemäß Gleichung (2) sinkt die Konzentration zum Zeitpunkt

$$m_{1,5‰} = \frac{\log\left(\frac{0,001}{0,008}\right)}{\log 0,95} \text{ Monate} = 32,635 \text{ Monate}$$

auf 1,5‰, d.h. ab dem 33. Monat kann wieder gebadet werden.

(b)

i. Die Medikamentenkonzentration zum Zeitpunkt $t = 0$ betrage m_0 . In einer Stunde werden 8% des Medikamentes abgebaut, d.h. es verbleiben 92% = 0,92. Der Abbauprozess kann rekursiv modelliert werden:

$$m_h = m_{h-1} \cdot 0,92$$

Der Index $h \in \mathbb{N}_0$ steht für die verstrichenen Stunden seit dem Zeitpunkt $t = 0$. Diese Form kann in eine explizite Darstellung überführt werden:

$$m_h = m_0 \cdot 0,92^h \frac{1}{\text{Stunden}} \quad (3)$$

Die Gleichheit der beiden Formen kann mittels Induktion nach m_h gezeigt werden.

Wenn die Anfangskonzentration $m_0 = 10 \text{ mg}$ beträgt, hat sich die Konzentration nach 10 Stunden auf

$$m_{10} = 10 \text{ mg} \cdot 0,92^{10} = 4,34 \text{ mg}$$

verringert.

ii. Gesucht ist der Zeitpunkt $h_{3 \text{ mg}}$ zu dem die Konzentration des Medikamentes einen Wert von $m_h = 3 \text{ mg}$ unterschreitet. Analoge Überlegungen wie bei der Konzentration gemäß Gleichung (2) in Aufgabenteil (a) führen zu einem allgemeinen Ausdruck für h_{m_h} :

$$h_{m_h} = \frac{\log\left(\frac{m_h}{m_0}\right)}{\log 0,92} \text{ Stunden} \quad (4)$$

also im betrachteten Fall

$$h_{3 \text{ mg}} = \frac{\log\left(\frac{3}{10}\right)}{\log 0,92} \text{ Stunden} = 14,43 \text{ Stunden}$$

Da die Konzentration nicht unter 3 mg sinken soll, muß also nach 14 Stunden eine erneute Medikamentengabe erfolgen.

- iii. Berechne zunächst mit Gleichung (3) die Wirkstoffkonzentration um 22 Uhr vor Einnahme der zweiten Tablette. Um 20 Uhr beträgt $m_{0a} = 10$ mg, gesucht ist die Konzentration nach zwei Stunden.

$$m_2 = m_{0a} \cdot 0,92^2 = 8,464 \text{ mg}$$

Zu diesem Zeitpunkt stockt Frau Immerkrank die Konzentration um weitere 10 mg auf, d.h. für die Berechnung der Konzentration um 6 Uhr morgens, also nach 8 Stunden, muß eine neue Anfangskonzentration $m_{0b} = m_2 + 10$ mg zugrunde gelegt werden.

$$m_8 = m_{0b} \cdot 0,92^8 = 18,464 \cdot 0,92^8 = 9,48 \text{ mg}$$

Um 6 Uhr früh hat sie also noch 9,48 mg Wirkstoff im Körper.

- iv. Zu bestimmen ist, nach welcher Zeit die Wirkstoffkonzentration nach Einnahme der ersten Tablette unter eine Konzentration von 3 mg sinkt. Aus Aufgabenteil i wissen wir, daß dies nach 14,48 Stunden der Fall ist. Berechne demnach die Konzentration nach 14 Stunden, die dann mit der zweiten Tablette um 10 mg erhöht wird.

$$m_{14} = 10 \text{ mg} \cdot 0,92^{14} = 3,112 \text{ mg}$$

Nach 14 Stunden ergibt sich also ein neuer Anfangswert von 3,112 mg, mit dem mittels Gleichung (4) wiederum die Zeit bestimmt werden muß, bei dem die Konzentration auf unter 3 mg absinkt.

$$h_{3\text{mg}} = \frac{\log\left(\frac{3}{13,112}\right)}{\log 0,92} \text{ Stunden} = 17,689 \text{ Stunden}$$

Nach weiteren 17 Stunden ist der Wert also gerade noch über 3 mg und wird um eine weitere Tablette auf

$$10 \text{ mg} + m_{17} = 10 \text{ mg} + (10 \text{ mg} \cdot 0,92^{14}) = 13,177 \text{ mg}$$

aufgestockt. Nun ist wieder zu bestimmen, wann dieser neue Anfangswert auf 3 mg absinkt:

$$h_{3\text{mg}} = \frac{\log\left(\frac{3}{13,177}\right)}{\log 0,92} \text{ Stunden} = 17,74 \text{ Stunden}$$

Man kommt also mit drei Tabletten $14 + 17 + 17 = 48$ Stunden aus, wenn die Konzentration im Körper nicht unter 3 mg sinken soll.

- v. Man kann den beschriebenen Vorgang rekursiv modellieren. Die Anfangskonzentration sei $m_0 = 10$ mg, dann ergeben sich für die Schritte nach jeweils $n \cdot 12$ Stunden:

$$\begin{aligned} m_{1 \cdot 12} &= 10 \text{ mg} \cdot 0,92^{12} \\ m_{2 \cdot 12} &= (m_{1 \cdot 12} + 10 \text{ mg}) \cdot 0,92^{12} = 10 \text{ mg} \cdot (0,92^{2 \cdot 12} + 0,92^{1 \cdot 12}) \\ m_{3 \cdot 12} &= (m_{2 \cdot 12} + 10 \text{ mg}) \cdot 0,92^{12} = 10 \text{ mg} \cdot (0,92^{3 \cdot 12} + 0,92^{2 \cdot 12} + 0,92^{1 \cdot 12}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für $m \in \mathbb{N}_0$ eine explizite Darstellung der Form

$$m_{n \cdot 12} = 10 \text{ mg} \sum_{i=1}^n 0,92^{i \cdot 12} \quad (5)$$

Die Gleichwertigkeit der beiden Formen kann mittels Induktion nach n gezeigt werden. Gleichung (5) ist der gesuchte formulare Zusammenhang.

Wenn sich ein Gleichgewicht einstellt, erreicht die Konzentration nach 12 Stunden einen festen Grenzwert. Dieser wird um $m_0 = 10$ mg aufgestockt, und erreicht nach 12 Stunden wieder den Grenzwert. In dieser Zeit sinkt die Konzentration auf das $0,92^{12} \approx 0,368$ -fache der Ursprungskonzentration ab. Bei einem Gleichgewicht stellt sich also der Zusammenhang

$$m_{12} = (m_{12} + m_0) \cdot 0,92^{12} \quad (6)$$

ein. Löst man diesen nach m_{12} auf, erhält man die gesuchte Grenzkonzentration:

$$m_{12} = \frac{m_0 \cdot 0,92^{12}}{1 - 0,92^{12}} = 5,814 \text{ mg}$$

Aufgabe 2

Da ε frei wählbar ist, haben wir $\varepsilon = 1$ gesetzt. Da der erste Kern sich im Mittelpunkt befindet, ergibt sich ferner $r_0 = 0$ und $\varphi_0 = 0$. Der Abstand des n -ten Kernes vom und der Winkel des n -ten Kernes zum ersten Kern ergeben sich gemäß

$$r_n = r_0 + n \cdot \varepsilon = n \cdot \varepsilon \quad (7)$$

$$\varphi_n = \varphi_0 + n \cdot \vartheta = n \cdot \vartheta \quad (8)$$

Abbildung 1 zeigt die Positionen der Kernmittelpunkte für verschiedene Differenzwinkel ϑ .

Man erkennt an den Anordnungen, daß die Kerne immer entlang konzentrischer Linien angeordnet sind. Für $\vartheta = 60^\circ$ stellt sich eine besonders dichte Packung ein, dies ist demnach der optimale Winkel.

Aufgabe 3

a)

Für das erste Blatt ist eine Hemmstoffkonzentration gegeben, die der Beziehung

$$h_1(x) = (1 + \cos x)^2 \quad (9)$$

folgt, wobei x den Winkel im Gradmaß angibt. Das zweite Blatt bildet sich beim Minimum dieser Hemmstoffkonzentration, also bei $x = 180^\circ$. Es produziert seinerseits Hemmstoff. Die Hemmstoffkonzentration des zweiten Blattes verhält sich analog zu der des ersten, allerdings mit einem Maximum bei $x = 180^\circ$ und einem Minimum bei $x = 0^\circ$. Die Hemmstoffkonzentration h_2 ist also gegen h_1 um 180° phasenverschoben. Dieser Phasenverschub schlägt sich in einem subtraktiven Faktor im Argument des Kosinus nieder, wie bereits auf dem ersten Übungsblatt modelliert. Für die Hemmstoffkonzentration des zweiten Blattes ergibt sich also

$$h_2 = (1 + \cos(x - 180))^2 \quad (10)$$

In Abbildung 2 sind die beiden Hemmstoffkonzentrationen und ihrer Überlagerung H_2 unter Annahme eines Alterungsfaktors $a = 0,5$ gemäß Gleichung (11) dargestellt.

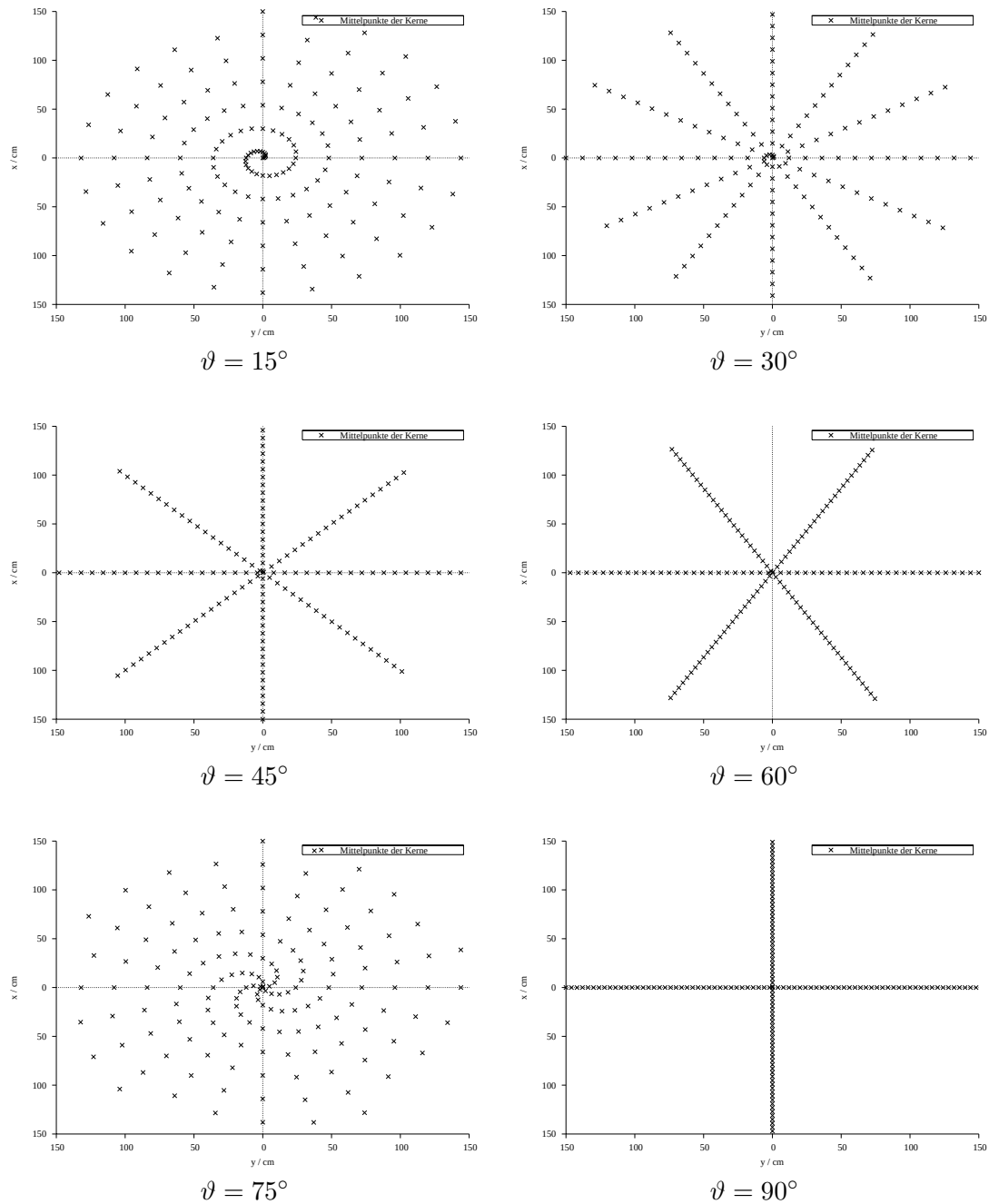


Abbildung 1: Anordnung der Kernmittelpunkte für verschiedene Differenzwinkel ϑ bei gegebenem Kernabstand $\varepsilon = 1$

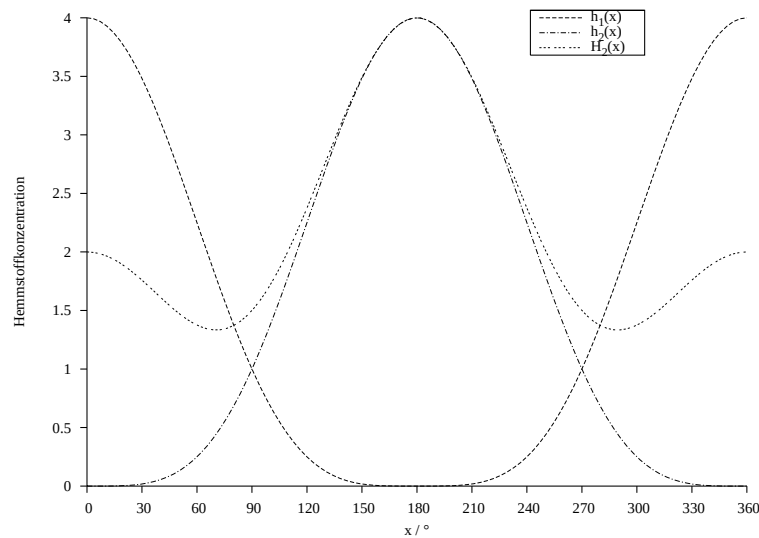


Abbildung 2: Hemmstoffkonzentrationen für das erste und zweite Blatt, Überlagerung unter Annahme eines Alterungsfaktors $a = 0,5$

b)

Gesucht sind die Minima der Funktion

$$\begin{aligned} H_2 &= h_2 + a \cdot h_1 \\ &= (1 + \cos(x - 180))^2 + a \cdot (1 + \cos x)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Mit Hilfe einer Tabellenkalkulation (Microsoft Excel) haben wir die Minima dieser Funktion zu $b_3 = 71^\circ$ und $b'_3 = 289^\circ$ bestimmt.

Wir nehmen an, daß sich das dritte Blatt zufällig bei b_3 bildet. Der von diesem produzierte Hemmstoff verteilt sich wiederum gemäß einer Gesetzmäßigkeit (9), allerdings diesmal mit einem Phasenverschiebung von 71° . Die Hemmstoffkonzentration des dritten Blattes kann also beschrieben werden durch

$$h_3 = (1 + \cos(x - b_3))^2 \quad (12)$$

c)

Wir kamen überein, daß sich in der Anordnung der Blätter keine andere Gesetzmäßigkeit als die in der Aufgabe beschriebene Bildung an Konzentrationsminima erkennbar ist. Bei der Betrachtung beider Minima zeigt sich, daß sich mit höherer Blattnummer n die Minima der Funktion H_n immer weiter als 180° voneinander entfernen. Wir führen dies auf numerische Effekte, insbesondere Rundungsfehler, zurück, da die zugrundeliegenden Kosinus-Funktionen 180° -symmetrisch sind.

d)

Betrachtet man die nach den Winkeln sortierte Reihenfolge, in der sich die Blätter bilden, so stellt man fest, daß sich diese für gewisse Bereiche von a nicht ändert. So sind die Blätter mit aufsteigendem

Winkel für $0,27 \leq a < 1$ in der Reihenfolge (1, 6, 3, 8, 5, 10, 2, 7, 4, 9) angeordnet. Für $0,1 \leq a < 0,24$ ist die Anordnung hingegen (1, 3, 8, 5, 10, 2, 7, 4, 9, 6). Für $0,24 \leq a < 0,27$ ergibt sich die Reihenfolge (1, 6, 3, 8, 5, 10, 2, 7, 4, 9). Es lassen sich noch weitere Intervalle für a finden, innerhalb derer sich die Reihenfolge der Blätter nicht ändert.

Wir vermuten hier eine analytisch herleitbare Gesetzmäßigkeit, die wir nicht weiter untersuchen. Diese Annahme motiviert sich dadurch, daß sich z.B. für $a = 0,24$ das Blatt Nummer 6 direkt bei 0° bilden würde und danach mit steigendem a immer größere Winkel annimmt.

Aufgabe 4

Auf dem m -ten Feld, $1 \leq m \leq 64$, liegen jeweils 2^{m-1} Reiskörner, da sich die Anzahl der Reiskörner mit jedem Feld verdoppelt und auf dem ersten Feld ein Reiskorn ($= 2^0$) liegt. Auf das 64-te Feld entfallen demnach $2^{63} \approx 9,223 \cdot 10^{18}$ Körner mit einem Gewicht von

$$9,223 \cdot 10^{18} \text{ Körner} \cdot 25 \cdot 10^{-9} \frac{\text{t}}{\text{Korn}} \approx 2,306 \cdot 10^{11} \text{ t} ,$$

was etwa dem 397,5-fachen der Weltjahresproduktion entspricht.

Die Gesamtsumme der Reiskörner berechnet sich mit Hilfe der Geometrischen Reihe zu

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} \approx 1,845 \cdot 10^{19} \text{ Körner}$$

mit einem Gesamtgewicht von

$$2^{64} \text{ Körner} \cdot 25 \cdot 10^{-9} \frac{\text{t}}{\text{Korn}} \approx 4,612 \cdot 10^{11} \text{ t} ,$$

oder etwa dem 795-fachen der Weltjahresproduktion.