Mathematische Modellierung
Lösungen zum 4. Übungsblatt

Klaus G. Blümel Lars Hoegen

22. November 2005

Aufgabe 1

(a)

Gesucht ist der Zinsatz p_e, für den die Gleichung

$$K_1 = K_0(1 + p_r)^{12} \tag{1}$$

mit $K_0 = 100$ Euro und $K_1 = 106$ Euro erfüllt ist. Forme demnach um:

$$\begin{aligned}
& K_1 = K_0(1 + p_r)^{12} \\
\Leftrightarrow \quad & p_r = \sqrt[12]{\frac{K_0}{K_1}} - 1 \\
& = e^{\frac{1}{12}\ln \frac{K_1}{K_0}} - 1 = e^{\frac{1}{12}\ln\left(\frac{106}{100}\right)} - 1 \\
& \approx 4,687 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

Die monatliche Verzinsung muß demnach bei etwa $0,486\%$ liegen. Daraus berechnet sich ein jährlicher Zinssatz von ca. $p_e = p_r \cdot 12 \approx 5,84\%$.

(b)

Bei wöchentlicher Verzinsung ändert sich in Gleichung (1) $p_r = \frac{p}{52} = \frac{6}{100 \cdot 52}$. Der effektive Zinssatz ergibt sich damit zu

$$K_1 = K_0 \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 52}\right)^{52} = K_0 \cdot e^{52 \cdot \ln\left(1 + \frac{6}{100 \cdot 52}\right)} = K_0 \cdot 1,06179982\,,$$

also etwa $6,179\%$.
Bei stündlicher Verzinsung gilt $p_r = \frac{p}{8760} = \frac{6}{100 \cdot 8760}$ und es folgt ein effektiver Jahreszins von

$$K_1 = K_0 \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 8760}\right)^{8760} = K_0 \cdot e^{52 \cdot \ln\left(1 + \frac{6}{100 \cdot 8760}\right)} = K_0 \cdot 1,06183637\,,$$

also etwa $6,183\%$.

Um den Zinssatz für immer kürzer werdende Zeitintervalle zu ermitteln, betrachte den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} K_1 = K_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \tag{2}$$

Der Term $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ stellt aber eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion e^p dar, daher läßt sich Gleichung (2) umformen zu

$$K_1 = K_0 \cdot e^p = K_0 \cdot e^{\frac{6}{100}} = K_0 \cdot 1,061836547 \tag{3}$$

der Grenzzinsatz liegt demnach bei etwa $6,184\%$.

Aufgabe 2

Abbildung 1 zeigt das gesuchte Bifurkationsprogramm zum logistischen Wachstum gemäß der itertiven Vorschrift $x_{n+1} = x_n + r \cdot (1 - x_n) \cdot x_n$.

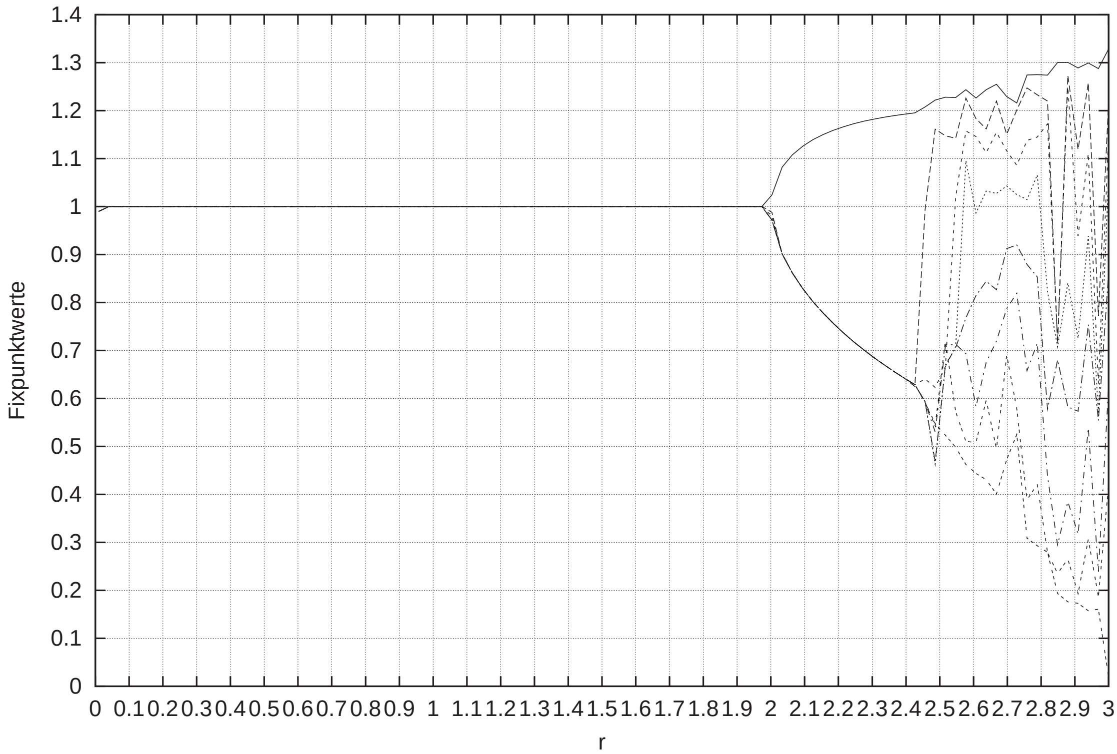

Abbildung 1: Bifurkationsdiagramm zum logarithmischen Wachstum

Die der Grafik zugrunde liegenden Werte wurden mit Hilfe eines selbsverfassten Computerprogramms berechnet, welches genügend viele Iterationsschritte (10000) ausführt und anschließend innerhalb der so gewonnenen Werte nach Fixpunkten sucht. Die so gefundenen Wertepaare wurden in eine Datei übertragen und anschließend mit einem geeigneten Plotprogramm zur Darstellung gebracht.

Man erkennt, daß sich im Bereich $1,95 \leq r \leq 2,4$ zwei Fixpunkte einstellen und daß für $2,4 \leq r$ ein scheinbar chaotisches Verhalten eintritt.

Aufgabe 3

Um zu zeigen, daß die angegeben Gleichungen die Differentialgleichungen lösen, leite diese ab und setze ein. Prüfe anschließend den Wahrheitswert der Differentialgleichung.

(a)

$$y(x) = Ce^{x^2} \qquad y'(x) = 2x \underbrace{Ce^{x^2}}_{y(x)} = 2xy$$

Die angegebene Gleichung ist eine Lösung.

(b)

$$y(x) = Ce^{-2x^2} + 2 \qquad y'(x) = -4xCe^{-2x^2}$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} y' + 4xy - 8x &= -4xCe^{-2x^2} + 4x\left(Ce^{-2x^2} + 2\right) - 8x \\ &= -4xCe^{-2x^2} + 4xCe^{-2x^2} + 8x - 8x = 0 \end{aligned}$$

Die angegebene Gleichung ist eine Lösung.

(c)

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad y''(x) = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

eingesetzt:

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$$

Die angegebene Gleichung ist eine Lösung.

Aufgabe 4

(a)

Abbildung 2 zeigt das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $\dot{y} = y - t^2$.

Die eingezeichneten Kurven stellen die Lösungen für die Anfangswertprobleme $t_0 = 0$ und $y_0 = -1$ (rot), $y_0 = 0$ (orange), $y_0 = 1$ (braun) und $y_0 = 2$ (grün) dar. Beim Verlauf der letzen beiden Lösungen waren wir uns nicht sicher. Das Richtungfeld läßt auf einen Verlauf schließen, der der durchgezogenen Linie entspricht und für beide Probleme gleich verläuft. Da dies aber der Stetigkeit der gesuchten Lösungen wiederspricht, müßten sich eigenlich Lösungen ergeben, die dem gestrichelten Verlauf entsprechen.

Hier wird das Diagramm eingeklebt

Abbildung 2: Richtungsfeld zur Differentialgleichung $\dot{y} = y - t^2$ mit Lösungen der Anfangswertprobleme

(b)

Abbildung 3 zeigt das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $\dot{y} = 1 + (cost)$.

Die eingezeichneten Kurven stellen Lösungen für die Anfangswertprobleme $t_0 = 2\ y_0 = 1$ (rot), $t_0 = 0\ y_0 = -2$ (orange) und $t_0 = -2\, y_0 = 0,5$ (grün) dar.

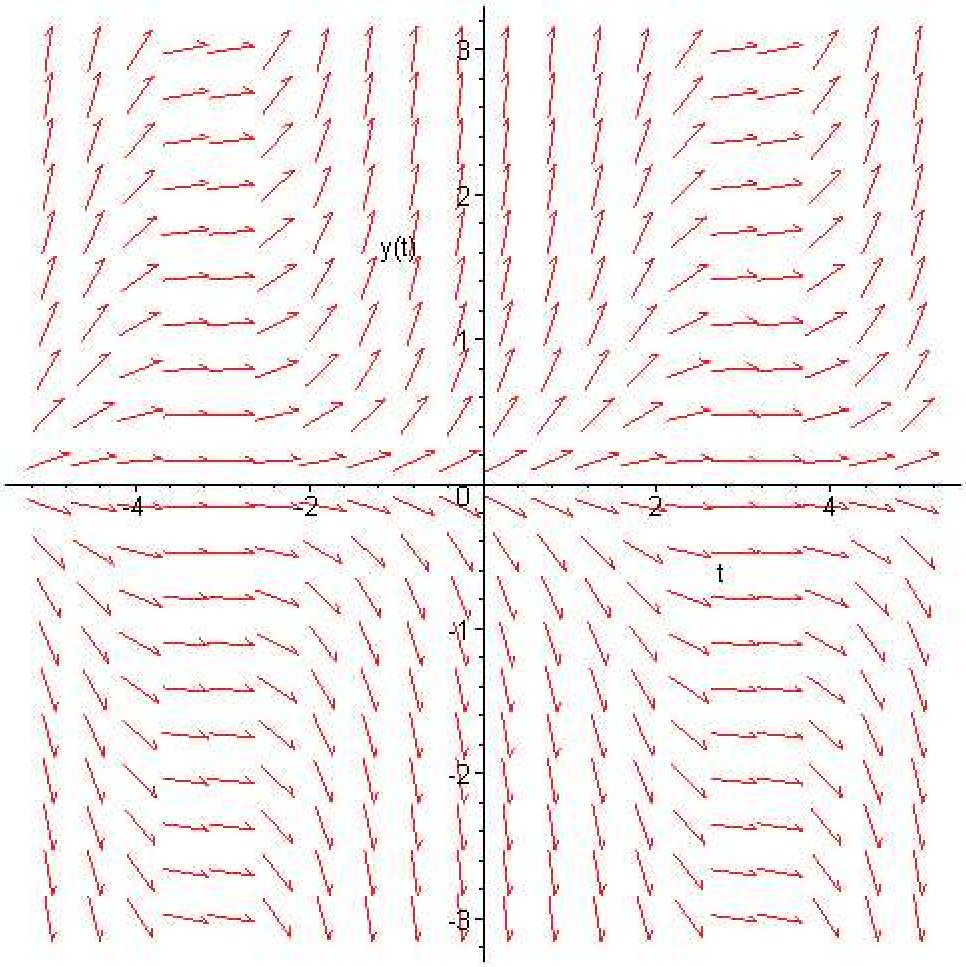

Abbildung 3: Richtungsfeld zur Differentialgleichung $\dot{y} = 1 + (cos t)$ mit Lösungen der Anfangswertprobleme