

Mathematische Modellierung

Rezensierte Lösungen zum 5. Übungsblatt

Klaus G. Blümel

Lars Hoegen

3. Dezember 2005

Vorbemerkung

Dieses Dokument entspricht nicht mehr ganz dem, was wir als Lösung der Aufgaben zur Korrektur abgegeben haben. Vielmehr wurde er von uns um die Lösungswege ergänzt, die Cora in der Übung am Freitag dem 02.12.2005 vorgestellt hat. Dies umfaßt insbesondere die beiden verschiedenen Lösungswege für die Aufgaben 1 und 2. Zum Vergleich sind an den entsprechenden Stellen beide Lösungswege nacheinander dargestellt.

Aufgabe 1

(a)

Erster Ansatz

Volumen und Oberfläche einer Kugel berechnen sich nach den Formeln $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ bzw. $F = 4\pi r^2$. Setzt man dies in die gegebene Beziehung ein, erhält man eine Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\lambda F \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi \frac{d[r(t)]^3}{dt} &= -\lambda 4\pi [r(t)]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d[r(t)]^3}{dt} &= -3\lambda [r(t)]^2\end{aligned}\tag{1}$$

Wir behaupten, daß $r(t) = -\lambda t + C$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt, denn wenn man einsetzt, erhält man eine wahre Aussage:

$$\begin{aligned}\frac{d[r(t)]^3}{dt} &= -3\lambda [r(t)]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d[-\lambda t + C]^3}{dt} &= -3\lambda [\lambda t + C]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d[-\lambda^3 t^3 - 3\lambda^2 t^2 C - 3\lambda t C^2 + C^3]}{dt} &= -3\lambda [\lambda^2 t^2 + 2\lambda t C + C^2]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -3\lambda^3 t^2 - 6\lambda^2 t C - 3\lambda C^2 = -3\lambda^3 t^2 - 6\lambda^2 t C - 3\lambda C^2 \quad (2)$$

Wir wissen, daß der Radius des Bonbons zum Zeitpunkt $t = t_0$ gerade r_0 ist. Aus diesem Anfangswertproblem läßt sich der Parameter C bestimmen:

$$\begin{aligned} r(t_0) &= -\lambda t_0 + C \stackrel{!}{=} r_0 \\ \Leftrightarrow C &= \lambda t_0 + r_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Damit ergibt sich $r(t)$ zu:

$$r(t) = -\lambda t + \lambda t_0 + r_0 \quad (4)$$

Zweiter Ansatz

Wir kennen die Formeln für Oberfläche und Volumen der Kugel (siehe oben) und erkennen den Zusammenhang

$$\frac{dV}{dt} = F \quad (5)$$

Wir suchen eine Differentialgleichung der Form $\frac{dr}{dt}$. In der zu lösenden Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda F$$

hat V die Form $V = V(r(t))$. Die Ableitungsregeln erlauben eine Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{dV(r(t))}{dt} &= \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} \\ \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \frac{dr}{dt} &= -\lambda F \frac{1}{F} \end{aligned} \quad (6)$$

Gleichung (6) hat die Lösung $r(t) = -\lambda t + C$. Aus dem Anfangswertproblem $r(t_0) = r_0$ ergibt sich, daß $C = \lambda t_0 + r_0$ sein muß. Man erhält also wiederum die Lösung (4).

(b)

Die Masse des Bonbons läßt sich beschreiben durch die Gleichung $M(t) = \varrho V(t) = \varrho \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3$, wobei ϱ die Dichte der Bonbonmasse angibt. Wir wissen, daß zum Zeitpunkt t_0 der Radius des Bonbons gleich r_0 ist, d.h. es läßt sich die Anfangsmasse bestimmen:

$$M(t_0) = \varrho \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad (7)$$

Im geschilderten Fall ist $t_0 = 0$.

Nach $t_1 = 60$ Sekunden hat sich Masse des Bonbons halbiert, d.h. es folgt

$$M(t_1) = \frac{1}{2} M(t_0)$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \varrho \frac{4}{3} \pi [r(t_1)]^3 = \frac{1}{2} \varrho \frac{4}{3} \pi [r(t_0)]^3 \\
 &\Leftrightarrow [r(t_1)]^3 = \frac{1}{2} [r(t_0)]^3
 \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen $t_0 = 0$ vereinfacht sich Gleichung (4) zu $r(t) = -\lambda t + r_0$. Eingesetzt in (8) erhält man einen Ausdruck für λ :

$$\begin{aligned}
 &[-\lambda t_1 + r_0]^3 = \frac{1}{2} r_0^3 \\
 &\Leftrightarrow \left[\frac{-\lambda t_1 + r_0}{r_0} \right]^3 = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{r_0 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)}{t_1}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Nun ist die Zeit t_g gesucht, nach der das Bonbon auf ein Zehntel seiner Ausgangsgröße (nicht -masse!) geschrumpft ist:

$$\begin{aligned}
 &r(t_g) = \frac{1}{10} r_0 \\
 &\Leftrightarrow r_0 - \lambda t_g = \frac{1}{10} r_0 \\
 &\Leftrightarrow t_g = \frac{9r_0}{10\lambda} = \frac{9}{10} \frac{60 \text{ s}}{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)} \\
 &\approx 261,75 \text{ s}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Das Bonbon hat also nach etwa 4 Minuten 22 Sekunden nur noch ein Zehntel der Ausgangsgröße.

Aufgabe 2

(a)

Ansatz einer Differentialgleichung

Das Gesamtvolumen des Raumes sei V . Pro Minute macht die Person 16 Atemzüge á 0,5 Liter. Die Atemgeschwindigkeit beträgt also $v_a = \frac{8 \text{ l}}{\text{min}}$. Der anfängliche Sauerstoffgehalt der Luft zum Zeitpunkt $t = 0$ sei S_0 .

Das Luftvolumen, das nach Δt Minuten veratmet wurde, berechnet sich gemäß $v_a(\Delta t) = v_a \cdot \Delta t$. Die ausgeatmete Luft hat einen Sauerstoffgehalt, der um $p = 20\%$ unter dem der eingeatmeten Luft liegt.

Ziel unserer Bemühungen soll sein, eine Differentialgleichung zu entwickeln, die die zeitliche Entwicklung $M_{\Delta t}$ der Sauerstoffmasse im Raum beschreibt. Nach einer Minute gilt für diese:

$$M_1 = S_1 \cdot V$$

$$\Leftrightarrow M_1 = \underbrace{S_0 (V - v_a \Delta t)}_{\text{Sauerstoffmasse, die nicht veratmet wurde}} + \underbrace{S_0 (1 - p) v_a \Delta t}_{\text{Sauerstoffmasse, deren Sauerstoffgehalt durch Atmen herabgesetzt wurde}}$$

$$M(1) = S_0 V - S_0 v_a \Delta t + S_0 (1 - p) v_a \Delta t$$

$$\Leftrightarrow S_1 = S_0 - S_0 \frac{v_a}{V} \Delta t + S_0 (1 - p) \frac{v_a}{V} \Delta t \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1 - S_0}{\Delta t} = -S_0 \left(\frac{v_a - (1 - p)v_a}{V} \right) = -S_0 \left(\frac{pv_a}{V} \right) \quad (12)$$

Aus (12) erhält man die gesuchte Differentialgleichung, indem man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ macht, denn aus dem Differenzenquotienten wird für infinitesimal kleine t die Ableitung. Wir erhalten somit:

$$\frac{dS}{dt} = -S(t) \left(\frac{pv_a}{V} \right) \quad (13)$$

Die Lösung einer Differentialgleichung dieser Gestalt lautet

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{pv_a}{V} t} \quad (14)$$

Ansatz über eine diskrete Betrachtung

Man kann den Vorgang auch iterativ modellieren. Wir untersuchen dazu, wie sich die Sauerstoffmasse nach einem Atemzug mit dem Volumen $V_A = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ geändert hat. Alle anderen Bezeichnungen entsprechen denen des ersten Abschnitts.

$$\begin{aligned} M_0 &= S_0 \cdot V \\ M_1 &= S_0(V - V_A) + S_0(1 - p)V_A \\ \Leftrightarrow S_1 &= S_0 \cdot \frac{V - V_A}{V} + S_0 \frac{(1 - p)V_A}{V} \\ &= S_0 \left(\frac{V}{V} - \frac{V_A}{V} + \frac{V_A}{V} - \frac{pV_A}{V} \right) \\ &= S_0 \underbrace{\left(1 - p \frac{V_A}{V} \right)}_{=: \mathcal{A}} \end{aligned} \quad (15)$$

Für die nachfolgenden Atemzüge S_n lassen sich die Betrachtungen analog wiederholen, wenn man als Ausgangskonzentration jeweils S_{n-1} ansetzt. Es ergibt sich eine iterative Beschreibung der Form

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 \mathcal{A} = S_0 \mathcal{A}^2 \\ S_3 &= S_2 \mathcal{A} = S_0 \mathcal{A}^3 \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} \mathcal{A} = S_0 \mathcal{A}^n \end{aligned}$$

Um nun eine Formel für den zeitlichen Verlauf $S(t)$, $[t] = \text{min}$, zu erhalten, muß noch die Anzahl der Atemzüge pro Minute berücksichtigt werden. In einer Minute werden 16 Atemzüge gemacht, d.h. es muß $S(t) = S_{16t}$ gelten. Damit halten wir:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 \cdot A^{16t} \\ &= S_0 \left(1 - p \frac{V_A}{V}\right)^{16t} \end{aligned} \quad (16)$$

Vergleich der beiden Lösungen

Der Leser wird zurecht anzweifeln, daß die beiden oben hergeleiteten Lösungen tatsächlich ein und das selbe Modell beschreiben. Diese Parallele wird allerdings deutlich, wenn man Gleichung (16) umformt:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 \left(1 - p \frac{V_A}{V}\right)^{16t} \\ &= S_0 e^{\ln \left(1 - p \frac{V_A}{V}\right) 16t} = S_0 e^{16t \ln \left(1 - p \frac{V_A}{V}\right)} \end{aligned} \quad (17)$$

Entwickelt man den natürlichen Logarithmus im Exponenten der e-Funktion in die Reihe

$$\ln(1 - x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \quad (18)$$

und vernachlässigt die Reste vom Grad ≥ 2 , so schmelzen alle Zweifel dahin.

(b)

Um zu bestimmen, auf welchen Prozentsatz der Sauerstoffgehalt nach acht Stunden, entsprechend 480 Minuten, abgesunken ist, setzten wir $S_0 = 100\%$. Das Raumvolumen ist mit $V = 40 \text{ m}^3$ angegeben. Diese Werte kann man nun in den Ausdruck (12) einsetzen:

$$S(t = 480) = 100\% \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{40 \text{ m}^3}\right)^{16 \cdot 480} \approx 98,098\%$$

Nach acht Stunden sind demnach etwa 1,902% des ursprünglich vorhandenen Sauerstoffs verbraucht.

Wenn der anfängliche Sauerstoffgehalt $S_0 = 21\%$ betrug, ergibt sich, daß nach acht Stunden

$$S(t = 480) = 21\% \cdot \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{40 \text{ m}^3}\right)^{7680} \approx 20,601\%$$

Sauerstoff übrig sind.

(c)

Wenn wir $S_0 = 100\%$ setzten, wird die Sauerstoffkonzentration durch das Lüften auf $S'_0 = 101,5\%$ angehoben. Um herauszufinden, nach welcher Zeit t die Sauerstoffkonzentration wieder auf den Wert S_0 abgesunken ist, löse Gleichung (12) nach t auf:

$$S_0 = S'_0 \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{40 \text{ m}^3}\right)^{16t}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln S_0 = \ln S'_0 + \ln \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{40 \text{m}^3} \right)^{16t} \\
&\Leftrightarrow \ln S_0 - \ln S'_0 = 16t \ln \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{40 \text{m}^3} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln \left(\frac{S_0}{S'_0} \right)}{16 \ln \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{40 \text{m}^3} \right)} = t \tag{19}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich t zu:

$$t = \frac{\ln \left(\frac{100}{101,5} \right)}{16 \ln \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{40 \text{m}^3} \right)} \approx 372,21 \text{ min}$$

Der zugelüftete Sauerstoff ist also nach etwa 6 Stunden und 12 Minuten verbraucht.

(d)

Laut Wikipedia.org (<http://de.wikipedia.org/wiki/Atemgift>) tritt im Fall (b) bei dem betrachteten Erwachsenen schon Unwohlsein auf, das bei einer Sauerstoffkonzentration zwischen 10% und 18% sehr wahrscheinlich ist.

Die Frage, wann die Person nicht mehr in der Lage ist zu lüften, leitet sich aus der Grenzkonzentration von 6% ab, bei der gewöhnlich Bewußtlosigkeit eintritt. Bei einer angenommenen Anfangskonzentration von 21% ist dies entsprechend Gleichung (19) nach

$$t = \frac{\ln \left(\frac{6}{21} \right)}{16 \ln \left(1 - \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{40 \text{m}^3} \right)} \approx 31319 \text{ min}$$

oder nach etwa 3 Wochen der Fall.

Rettungskräfte (mit Atemschutz!) hätten dann noch eine Woche und fünfeinhalb Tage Zeit, bevor mit Unterschreiten einer Konzentration von 3% der Exitus der Versuchsperson aufgrund von Sauerstoffmangel eintritt. Angenommen, die Bewußtlosigkeit hält innerhalb dieser Zeitspanne an, wird die Versuchsperson allerdings schon vorher an Flüssigkeitsmangel versterben.

Aufgabe 3

Wir haben die Werte des einfachen und verbesserten Euler-Verfahren für die Differentialgleichung $y' = y - t^2$ und dem Anfangswertproblem $(t_0, y_0) = (0, 1)$ mit Hilfe eines selbst verfassten Programms berechnet und anschließend die Werte mit dem Programm Gnuplot zu der Darstellung in Abbildung 1 gebracht.

Wie zu erkennen ist, beeinflusst die Schrittweite den Verlauf der Lösungen für das einfache Euler-Verfahren stärker als beim verbesserten Euler-Verfahren. Die verschiedenen Verfahren ergeben zum Zeitpunkt $T = 5$ diese Lösungen:

- Das einfache Euler-Verfahren mit einer Schrittweite von 0,1 ergibt $y(5) = -92,030$,

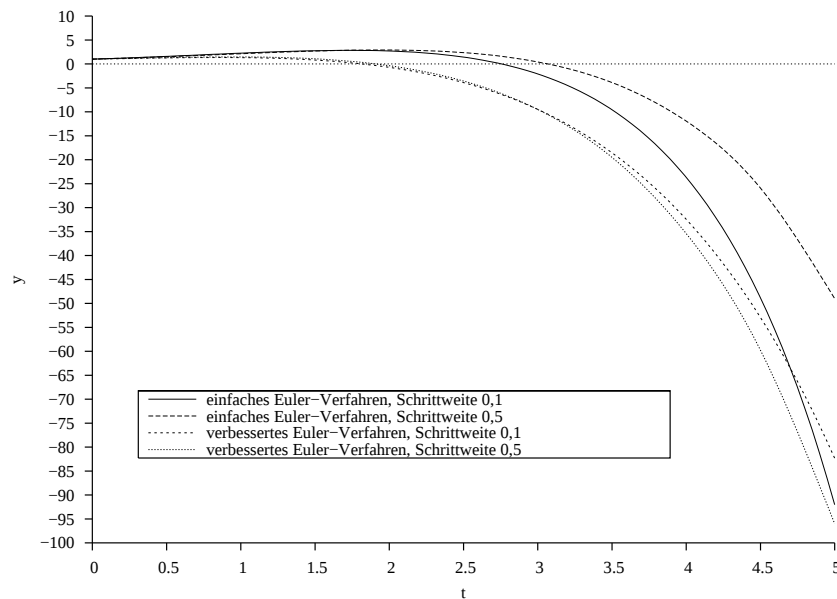


Abbildung 1: Lösungen für das Anfangswertproblem $y' = y - t^2$, $(t_0, y_0) = (0, 1)$ nach dem Euler-Verfahren

- das einfache Euler-Verfahren mit einer Schrittweite von 0,5 ergibt $y(5) = -48,998$,
- das verbesserte Euler-Verfahren mit einer Schrittweite von 0,1 ergibt $y(5) = -82,339$ und
- das verbesserte Euler-Verfahren mit einer Schrittweite von 0,5 ergibt $y(5) = -96,015$.¹

Die analytische Lösung für die gegebene Differentialgleichung und dem Anfangswertproblem lautet:

$$y(t) = t^2 + 2t + 2 - e^t \quad (20)$$

womit sich $y(5) = -111,413$ ergibt. Es zeigt sich, daß das Euler-Verfahren nur sehr ungenau annähert.

Aufgabe 4

(a)

Die zeitliche Entwicklung der Füllhöhe eines beliebig geformten auslaufenden Gefäßes wird vom auslaufenden Flüssigkeitsvolumen pro Zeit, also von der Auslaufgeschwindigkeit bestimmt. Diese hängt aber vom Druck ab, der am Loch herrscht. Der Druck wiederum wird von der zeitlich veränderlichen Füllhöhe $H(t)$ bestimmt. Wir wollen daher eine Differentialgleichung über diesem Parameter aufstellen. Dazu wählen wir – wie auch im Skript [1, Seite 30 ff.] beschrieben – den Ansatz

$$\Delta V = -k \cdot H \cdot \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = -k \cdot H \quad (21)$$

¹Die Zahlen für das verbesserte Euler-Verfahren sind zu niedrig. Die von Cora vermutete Ursache eines vergessenen Faktors haben wir bisher noch nicht verifiziert. Wir arbeiten an der Verbesserung, die korrigierten Werte werden beizeiten nachgetragen.

Das Volumen V ändert sich in Abhängigkeit der Zeit t und der Füllhöhe H mit einem Proportionalitätsfaktor k , welcher die Parameter Lochgröße, Lochform und Zähigkeit der Flüssigkeit zusammenfassend beschreibt.

Betrachtet man in Gleichung (21) nun infinitesimal klein werdende Zeitabschnitte Δt , so lässt sich der Vorgang mit Hilfe einer Differentialgleichung modellieren, da $\Delta V/\Delta t$ in dV/dt übergeht.

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = -k \cdot H \quad (22)$$

Für das Wasservolumen in einem beliebig geformten Körper gilt allgemein

$$V(H) = \int_0^H F(h) dh$$

Damit erlaubt die Kettenregel eine Umformung:

$$\dot{V} = \frac{dV(H(t))}{dt} = \frac{dV(H)}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} = F(H) \cdot \dot{H}$$

Es folgt

$$\dot{H} = -k \frac{H}{F(H)}. \quad (23)$$

Gleichung (23) erlaubt die Modellierung des Auslaufens beliebig geformter Körper, wenn man einen Ausdruck für $F(H)$ kennt.

Nun gilt es also, einen Ausdruck zu finden, der die Entwicklung $F(H)$ der Oberfläche in Abhängigkeit von der Füllhöhe für den auslaufenden Wok beschreibt.

Die Wände des Woks sollen parabelförmig gebogen sein, daher wählen wir für die Füllhöhe der Flüssigkeit einen Ansatz der Form $H = a \cdot R^2$. Der Parameter a lässt sich aus der Anfangsbedingung bestimmen, denn es gilt $H_0 = a \cdot R_0^2$ bzw. $a = H_0/R_0^2$ mit der Anfangsfüllhöhe H_0 und dem anfänglichen Radius der Oberfläche R_0 .

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die gesuchte Beziehung:

$$F(H) = \pi R^2 = \pi \frac{H}{a} = \pi \frac{H}{H_0} R_0^2 = \frac{H}{H_0} F_0 \quad (24)$$

F_0 ist die Oberfläche zum Startzeitpunkt.

Eingesetzt in Gleichung (23) ergibt sich die Differentialgleichung für den auslaufenden Wok:

$$\dot{H} = -\frac{k}{F_0} \cdot H_0 \quad (25)$$

(b)

Um eine analytische Lösung der Differentialgleichung (23) zu erhalten, integrieren wir diese:

$$H(t) = \int \dot{H} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int -\frac{k}{F_0} \cdot H_0 \, dt \\
 &= -\frac{k}{F_0} \cdot H_0 \cdot t + C
 \end{aligned} \tag{26}$$

Aus dem Anfangswertproblem $H(t_0 = 0) = H_0$ ergibt sich, daß $C = H_0$ sein muß. Die analytische Lösung für die Differentialgleichung des auslaufenden Woks lautet demnach:

$$H(t) = -\frac{k}{F_0} \cdot H_0 \cdot t + H_0 \tag{27}$$

(c) und (d)

Wir haben die Differentialgleichungen für den auslaufenden Zylinder, den auslaufenden Trichter und den auslaufenden Wok über das einfache Euler-Verfahren, Schrittweite 0,5, mit Hilfe eines kleinen PASCAL-Programms gelöst und die Werte anschließend mit Hilfe des Programms Gnuplot in Abbildung 2 dargestellt. In Anlehnung an das Beispiel im Skript [1, Seite 31] haben wir $-\frac{k}{F_0} = 2 \frac{1}{\text{min}}$ gewählt und als Ausgangshöhe $H_0 = 30 \text{ cm}$ angesetzt.

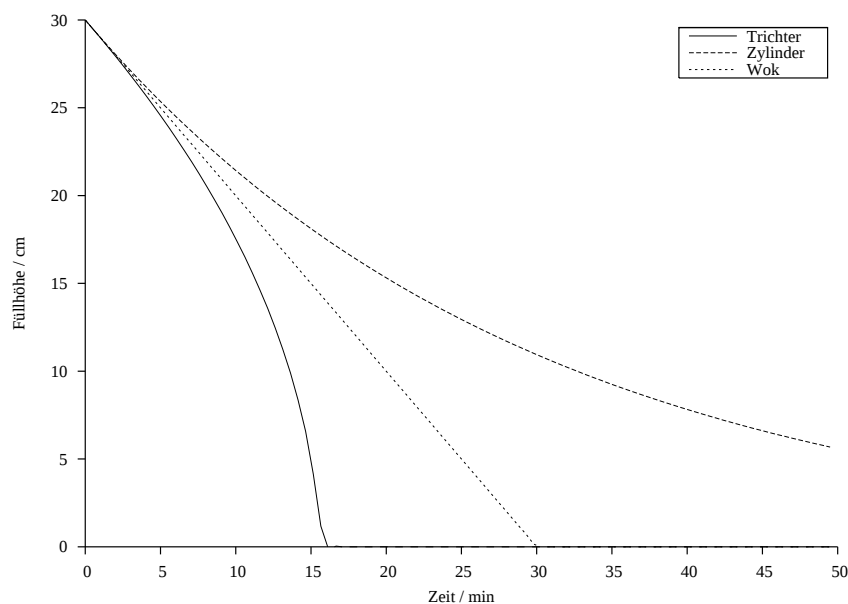


Abbildung 2: Grafische Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Füllhöhe für verschiedene auslaufende Gefäße

Die Unebenheit im Kurvenverlauf des Trichters im Bereich $0 \text{ cm} \leq h \leq 2 \text{ cm}$ führen wir auf numerische Effekte zurück, zu erwarten wäre ein glatter Verlauf. Die Modellgleichung versagt an dieser Stelle, da die Steigung der modellierten Kurve für $F(H) \rightarrow 0$ gegen ∞ geht.

(e)

Der erste Hälfte des dargestellten Füllhöhenverlaufs ähnelt dem Verlauf, der in Aufgabenteil (d) für den Trichter dargestellt ist. Da die Kurve in der zweiten Hälfte abflacht und in einen nahezu linearen

Verlauf übergeht, der auf einen zylindrischen Körper hindeutet, vermuten wir, daß es sich bei dem dargestellten Verlauf um den eines Trichters mit unten angesetztem zylindrischen Auslauf handelt.

Literatur

- [1] Cora Kohlmeier. *Einführung in die Mathematische Modellierung*. Skript zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Modellbildung für das Lehramt an Gymnasien“, gehalten im Wintersemester 2005/06 an der Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg. Eigenverlag am *Institut für Chemie und Biologie des Meeres* (ICBM). 2005.