

Mathematische Modellierung

Rezensierte Lösungen zum 6. Übungsblatt

Klaus G. Blümel

Lars Hoegen

20. Dezember 2005

Vorbemerkung

Wir haben dieses Dokument nicht in dieser Form abgegeben. In diese rezensierte Fassung sind neben einigen Vorzeichenkorrekturen insbesondere die Anmerkungen eingeflossen, die Cora in der Übung am 09.12. 2005 zu Aufgabe 3 gemacht hat. Wir haben die dort gezeigte Grafiken komplett neu erstellt und eingebunden.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^2 + (A - B)x + C \quad (1)$$

Für den stationären Zustand muß $\dot{x} = 0$ gelten. Wir untersuchen demnach, für welche x die Bedingung

$$0 \stackrel{!}{=} -x^2 + (A - B)x + C = x^2 - (A - B)x - C \quad (2)$$

gilt. Die rechte Seite von (2) hat die Gestalt $0 = x^2 + px + q$ mit $p = -(A - B)$ und $q = -C$. Durch quadratische Ergänzung¹ finden wir für x zwei Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= \frac{(A - B)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-(A - B))^2}{4} + C} \\ &= \frac{(A - B)}{2} \pm \sqrt{\frac{(A - B)^2}{4} + C} \end{aligned} \quad (3)$$

Da nach Voraussetzung $A, B, C > 0$, ist in jedem Fall $\sqrt{\frac{(A-B)^2}{4} + C} > \frac{(A-B)}{2}$. x beschreibt die Konzentration des Stoffes X und kann daher nur positive Werte annehmen. Der einzig chemisch sinnvolle stationäre Zustand der Differentialgleichung (1) liegt somit bei

$$x_s = \frac{(A - B)}{2} + \sqrt{\frac{(A - B)^2}{4} + C} \quad (4)$$

¹Herleitung siehe Anhang

Um das Terrain für die Untersuchung der Stabilität des soeben gefundenen stationären Zustandes zu ebenen, müssen wir die Ableitung $\frac{df(x_s)}{dx}$ mit $f(x) = \dot{x}$ gemäß (1) untersuchen.

$$\begin{aligned}\frac{df(x_s)}{dx} &= -2x_s + (A - B) \\ &= -2\frac{(A - B)}{2} - 2\sqrt{\frac{(A - B)^2}{4} + C} + (A - B) \\ &= -2\sqrt{\frac{(A - B)^2}{4} + C}\end{aligned}\quad (5)$$

Das Stabilitätskriterium für den betrachteten stationären Zustand wird vom Vorzeichen dieser Ableitung bestimmt. Der Wert des Wurzelterms ist in jedem Fall größer Null, da $A, B, C > 0$. Damit ist der Wert der Ableitung in jedem Fall kleiner Null und der betrachtete stationäre Zustand x_s ist stabil.

Aufgabe 2

Wir möchten die stationären Zustände eines Systems, das durch die Differentialgleichung

$$\dot{V} = rV \left(1 - \frac{V}{K}\right) - \frac{\beta HV}{V + V_0} \quad (6)$$

beschrieben wird, bestimmen. Diese sind charakterisiert durch die Bedingung $\dot{V} = 0$. Wir suchen daher Lösungen, die diese Bedingung erfüllen. Eine (triviale) Lösung ist $V_1 = 0$. Wir setzen daher $V \neq 0$ voraus und finden zwei weitere Lösungen:

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{!}{=} rV - \frac{r}{K}V^2 - \frac{\beta H}{\left(1 + \frac{V_0}{V}\right)} \\ \Leftrightarrow \beta H &= \left(rV - \frac{r}{K}V^2\right) \left(1 + \frac{V_0}{V}\right) \\ \Leftrightarrow \beta H &= rV - \frac{r}{K}V^2 + rV_0 - \frac{V_0}{K}rV \\ \Leftrightarrow 0 &= rV \left(1 - \frac{V_0}{K}\right) - \frac{r}{K}V^2 - \beta H + rV_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= V^2 - V(K - V_0) + \frac{\beta HK}{r} - V_0K\end{aligned}\quad (7)$$

Die Gleichung (7) hat die Gestalt $0 = x^2 + px + q$ mit $p = -(K - V_0)$ und $q = \frac{\beta HK}{r} - V_0K$. Nach der p-q-Formel folgen die Lösungen

$$\begin{aligned}V_{2/3} &= \frac{(K - V_0)}{2} \pm \sqrt{\frac{(K - V_0)^2}{4} - \frac{\beta HK}{r} + V_0K} \\ &= \frac{(K - V_0)}{2} \pm \sqrt{\frac{(K - V_0)^2 - 4\frac{\beta HK}{r} + 4V_0K}{4}} \\ &= \frac{(K - V_0)}{2} \pm \sqrt{\frac{(K + V_0)^2}{4} - \frac{\beta HK}{r}}\end{aligned}\quad (8)$$

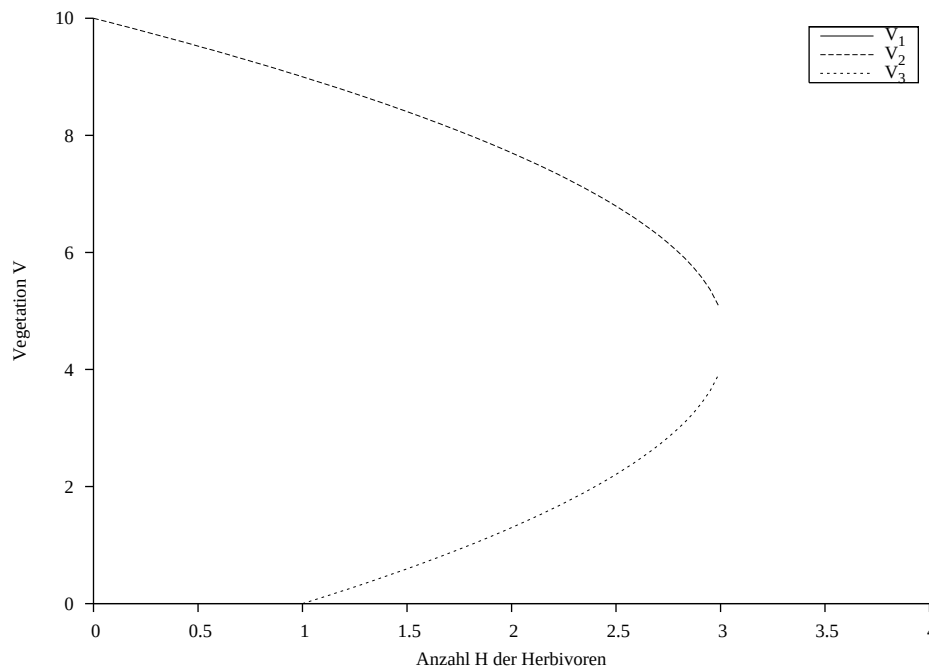

 Abbildung 1: Diagramm der Vegetationsentwicklung für die stationären Zustände V_1 und V_2

Abbildung 1 zeigt ein Diagramm der Vegetationsentwicklung für die stationären Zustände V_1 und V_2 bei den gegebenen Parametern $r = 1$, $\beta = 1$, $K = 10$ und $V_0 = 1$. Es ergeben sich die Funktionen:

$$V_{2/3} = \frac{(10-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(10-1)^2}{4} - \frac{10H}{1} + 10} = 4,5 \pm \sqrt{30,25 - 10H} \quad (9)$$

Man erkennt, daß nur im Bereich $1 \leq H \leq 3,025$ beide positiven stationären Lösungen existieren. Die rechte Grenze wird durch die Bedingung $V_2 = V_3$ bestimmt. Dies ist gerade dann der Fall, wenn der Wurzelterm den Wert Null annimmt. Wir bestimmen daher den Wert H , für den gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \sqrt{30,25 - 10H} \Leftrightarrow 10H = 30,25 \Leftrightarrow H = 3,025$$

Die linke Grenze können wir aus der Bedingung $V_3 = 0$ bestimmen:

$$0 \stackrel{!}{=} 4,5 - \sqrt{30,25 - 10H} \Leftrightarrow 4,5^2 = 30,25 - 10H \Leftrightarrow 10H = 30,25 - 4,5^2 \Leftrightarrow H = 1$$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Differentialgleichung

$$\dot{Y} = r \left(1 - \frac{Y}{K} \right) Y = rY - \varepsilon Y^2 \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{r}{K} \quad (10)$$

die einen logistischen Wachstumsprozeß beschreibt.

(a)

Abbildung 2 zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung (10) mit den Parametern $r = 1$ und $K = 1$.

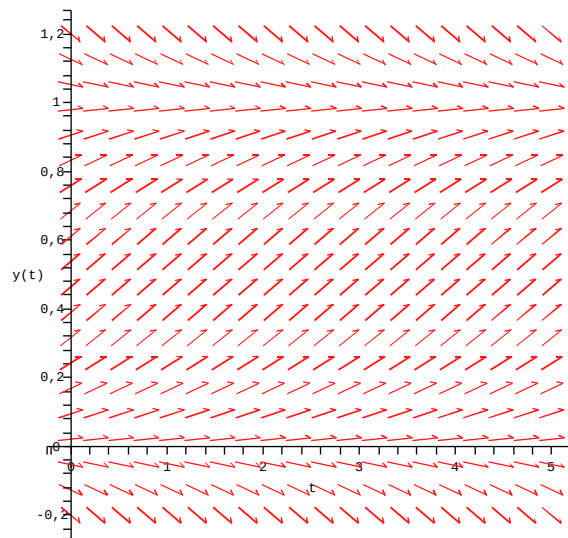


Abbildung 2: Richtungsfeld der Differentialgleichung (10) mit den Parametern $r = 1$ und $K = 1$

Man erkennt einen stationären Zustand bei $Y = K$. Dieser ist zu erwarten, denn aus der Bedingung $\dot{Y} \stackrel{!}{=} 0$ folgt

$$0 \stackrel{!}{=} KY - \frac{r}{K}Y^2 \Leftrightarrow \frac{r}{K}Y^2 = rY \Leftrightarrow Y_s = K$$

Der Zustand ist für $r > 0$ stabil, denn mit $f(Y) = \dot{Y}$ gilt

$$\frac{df(Y_s)}{dY} = r - 2\varepsilon Y_s = r - 2\frac{r}{K}K = r - 2r = -r < 0$$

(b)

Die Abbildungen 3 bis 6 auf den Seiten 5 f. zeigen den Verlauf der Lösungen für verschiedene Parameterkombinationen.

(c)

Da $\varepsilon = \frac{r}{K}$, sind zwei Fälle möglich, in denen $\varepsilon < 0$ ist.

1. Fall Für $r > 0$ und $K < 0$ verliert der rechte quadratische Term der Differentialgleichung (10) seine beschränkende Wirkung. Das logistische Wachstum geht über alle Grenzen hinaus. Dies

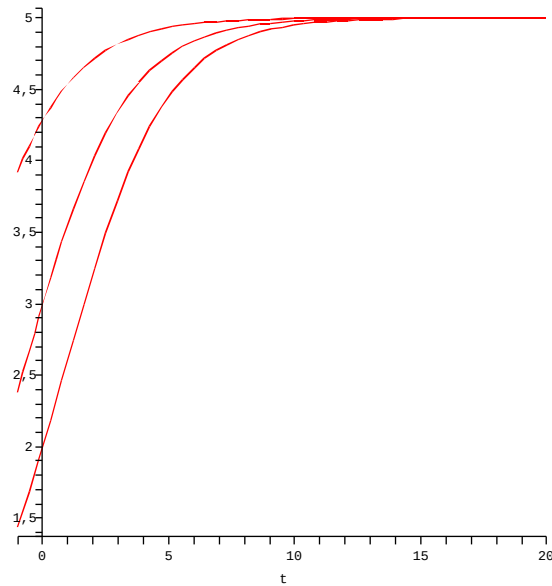


Abbildung 3: Lösungen der Differentialgleichung (10) für die Parameter $r = 0.5$, $K = 5$ und $y_0 = 15$ (oben), $y_0 = 6$ (Mitte) sowie $y_0 = 2$ (unten)

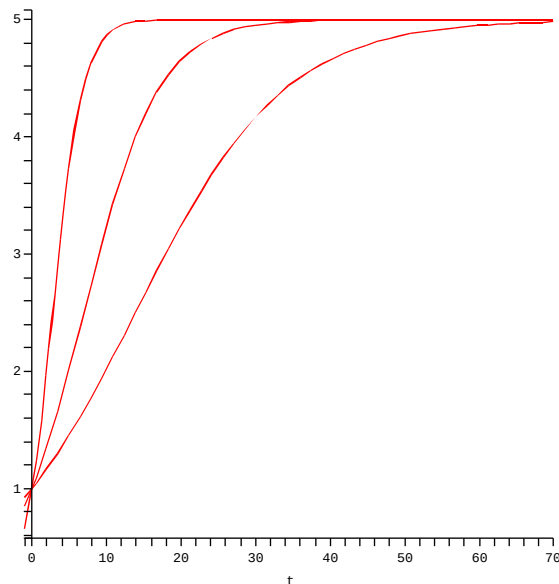


Abbildung 4: Richtungsfeld der Differentialgleichung (10) mit den Parametern $K = 5$, $y_0 = 1$ und $r = 0.5$ (oben), $r = 0.2$ (Mitte) sowie $r = 0.1$ (unten)

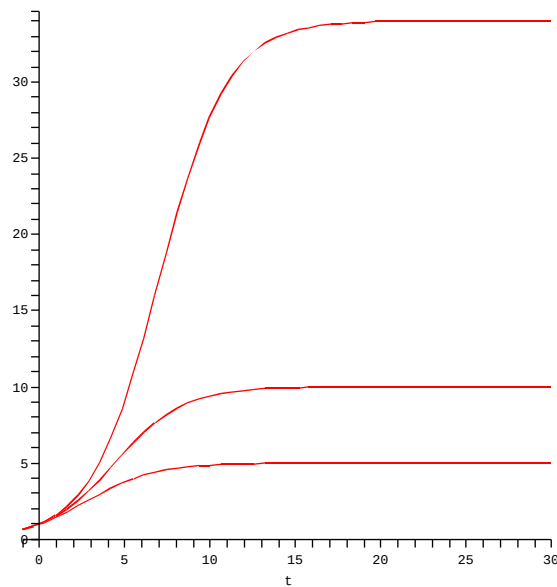


Abbildung 5: Richtungsfeld der Differentialgleichung (10) mit den Parametern $r = 0.5$, $y_0 = 1$ und $K = 34$ (oben), $K = 10$ (Mitte) sowie $K = 5$ (unten)

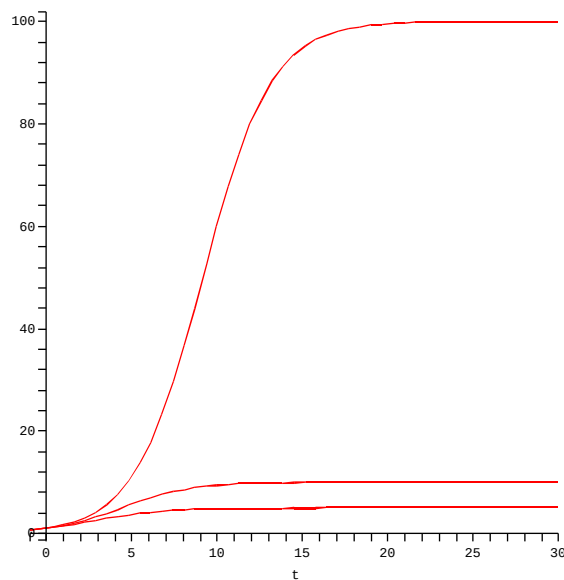


Abbildung 6: Richtungsfeld der Differentialgleichung (10) mit den Parametern $r = 0.5$, $y_0 = 1$ und $\varepsilon = 0.1$ (oben), $\varepsilon = 0.05$ (Mitte) sowie $\varepsilon = 0.015$ (unten)

erkennt man auch daran, daß sich für $t > 0$ keine positiven stationären Zustände² mehr finden lassen. Von jedem gegebenen (positiven³) Anfangswert wächst die Population gegen ∞ .

2. Fall Für $r < 0$ und $K > 0$ gibt es einen erwarteten stationären Zustand bei $Y = K$, vgl. Aufgabenteil (a). Dieser ist allerdings instabil, da $r < 0$, d.h. $-r > 0$.

(d)

Um zu prüfen, ob der gegebene Ausdruck eine Lösung der Differentialgleichung (10) darstellt, leiten wir diesen ab:

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= K \left[\frac{(e^{r(t-m)} \cdot r) (1 + e^{r(t-m)}) - (e^{r(t-m)} \cdot e^{r(t-m)} \cdot r)}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \right] \\ &= K \left[\frac{e^{r(t-m)} \cdot r + e^{2r(t-m)} \cdot r - e^{2r(t-m)} \cdot r}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \right] \\ &= \frac{Kr \cdot e^{r(t-m)}}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Setzt man den gegebenen Ausdruck in die Differentialgleichung (10) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} rY - \frac{1}{K}Y^2 &= r \left(K \frac{e^{r(t-m)}}{1 + e^{r(t-m)}} \right) - \frac{1}{K} \left(\frac{e^{2r(t-m)}}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \right) \\ &= \frac{Kr \cdot (e^{r(t-m)}) (1 + e^{r(t-m)}) - e^{2r(t-m)}}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \\ &= \frac{Kr \cdot e^{r(t-m)}}{(1 + e^{r(t-m)})^2} \stackrel{(11)}{=} \frac{dY(t)}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

Wir erkennen, daß der angegebene Term eine Lösung der Differentialgleichung darstellt. Mit dem Anfangswert $Y(0) = Y_0 > 0$ läßt sich ein Ausdruck für m gewinnen:

$$\begin{aligned} Y(0) &= K \frac{e^{-rm}}{1 + e^{-rm}} \stackrel{!}{=} Y_0 \\ \Leftrightarrow Ke^{-rm} &= Y_0 + Y_0 e^{-rm} \\ \Leftrightarrow e^{-rm}(1 - Y_0) &= \frac{Y_0}{K} \\ \Leftrightarrow -rm &= \ln \left(\frac{Y_0}{K(1 - Y_0)} \right) \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{\ln \left(\frac{Y_0}{K(1 - Y_0)} \right)}{r} = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{K}{Y_0} - K \right) \end{aligned} \quad (13)$$

²Der triviale stationäre Zustand $Y_1 = 0$ existiert auch in diesem Fall.

³Wir modellieren einen Wachstumsprozeß, d.h. negative Anfangswerte sind nicht sinnvoll.

(e)

Um das Verhalten des logistischen Wachstums der Bohne für verschiedene Parameter untersuchen zu können, haben wir die gegebene Differentialgleichung (10) durch das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung approximiert.⁴

Wir haben dann für verschiedene Parameter von r , K und $Y(0)$ Lösungskurven erstellt. Um ihre Qualität beurteilen zu können, haben wir für die gegebenen Meßzeitpunkte die quadratische Differenz zwischen approximiertem Funktionswert und der gemessenen Höhe gebildet. In Anlehnung an die Methode der kleinsten Quadrate sehen wir die Summe der so berechneten Abweichung als Maßstab für die Güte der Approximation an.

Für $r = 0,10$, $K = 254$ und $Y(0) = 1,30$ haben wir die kleinste quadratische Abweichung ermittelt. Das Programm Maple verhalf uns zu der Lösung

$$Y(t) = \frac{254}{\left(1 + \left(\frac{2527}{13}\right) \cdot e^{-\frac{t}{10}}\right)} \quad (14)$$

zur gegebenen Differentialgleichung $\dot{Y} = 0,1 \cdot Y \left(1 - \frac{Y}{254}\right)$ mit dem Anfangswert $Y(0) = 1,30$.

A Herleitung der p-q-Formel

In der Lösung zu Aufgabe 1 wird behauptet, daß eine Gleichung $0 = x^2 + px + q$ allgemein durch $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ gelöst wird. Diese sog. *p-q-Formel* kann durch quadratische Ergänzung wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow & x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

⁴Bei einem Test mit dem Runge-Kutta-Verfahrens 2. Ordnung war uns die Approximation (für die Parameter $r = 1$ und $K = 1$) nicht genau genug, so daß wir uns für das etwas aufwendigere Verfahren entschieden haben. Das Verfahren 4. Ordnung ergab mit den Parametern $r = 1$ und $K = 1$ eine wesentlich bessere Approximation.