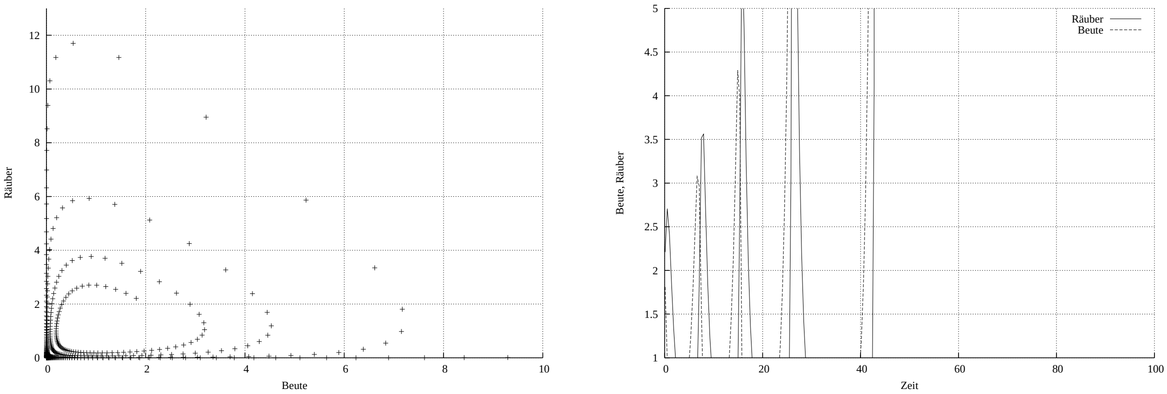
Mathematische Modellierung
Lösungen zum 7. Übungsblatt

Klaus G. Blümel Lars Hoegen

20. Dezember 2005

Aufgabe 1

Wir haben das gegebene erweiterte, skalierte Lotke-Volterra-Modell mit Hilfe eines PASCAL-Programms numerisch nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Die so erzeugten Datenpunkte haben wir mittels Gnuplot zur Darstellung der geforderten Phasendigramme und Zeitdiagramme (Abbildungen 1 bis 5) verarbeitet. Die Datenpunkte der Zeitdiagramme wurden mit Hilfe einer kubischen Regression miteinander verbunden.



(a) (b)

Abbildung 1: Phasendiagramm (a) und Zeitdiagramm (b) des Räuber-Beute-Modells mit den Parametern $(\delta, \kappa, \varepsilon) = (1, 0, 0)$

In Abbildung 2 sind zwei Phasendiagramme für verschiedene Anfangswerte dargestellt. Man erkennt, daß das System sowohl „von innen“ als auch „von außen“ einem stationären Zustand entgegenstrebt. Auch das in Abbildung 3 dargestellte System weist einen stationären Zustand auf.

Die anderen drei Systeme haben keinen stationären Zustand, bei dem noch Räuber vorhanden wären.

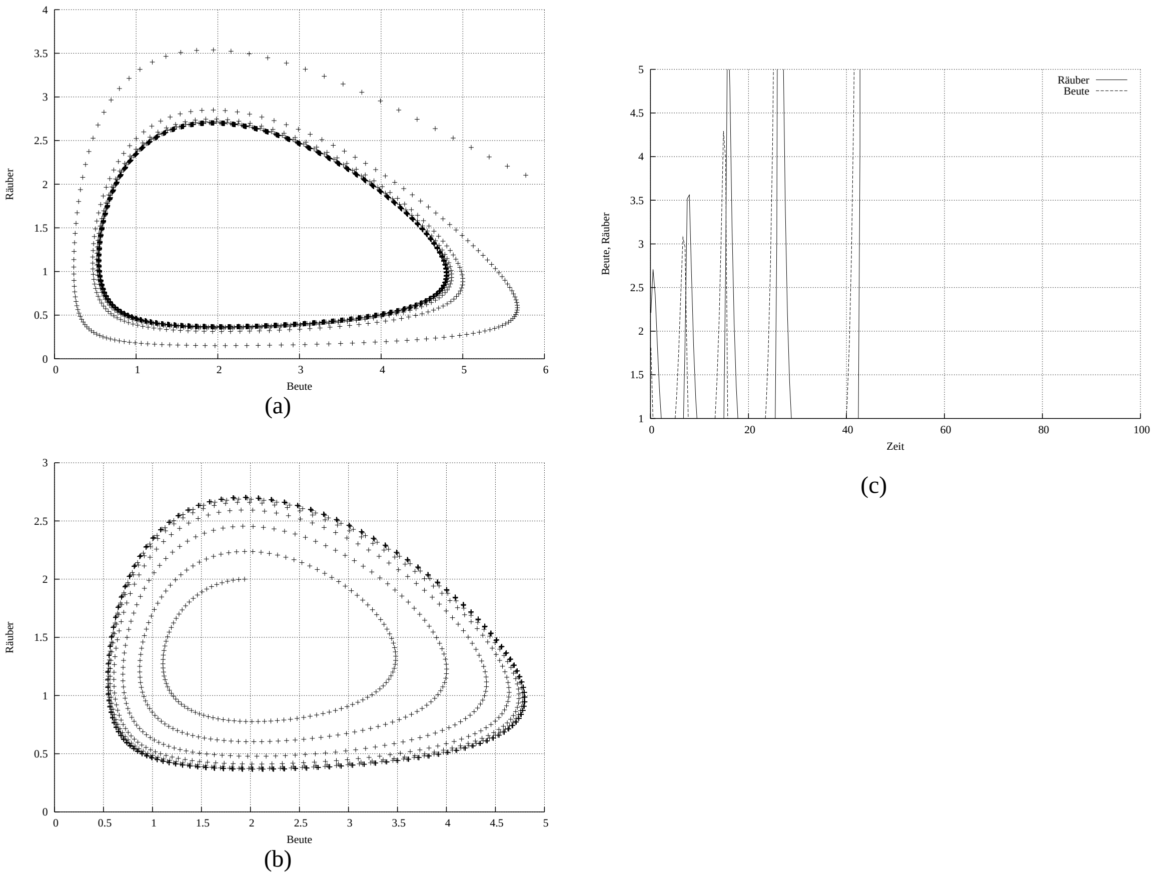


Abbildung 2: Phasendiagramme (a), (b) und Zeitdiagramm (c) des Räuber-Beute-Modells mit den Parametern $(\delta, \kappa, \varepsilon) = (1, 0.5, 0.15)$

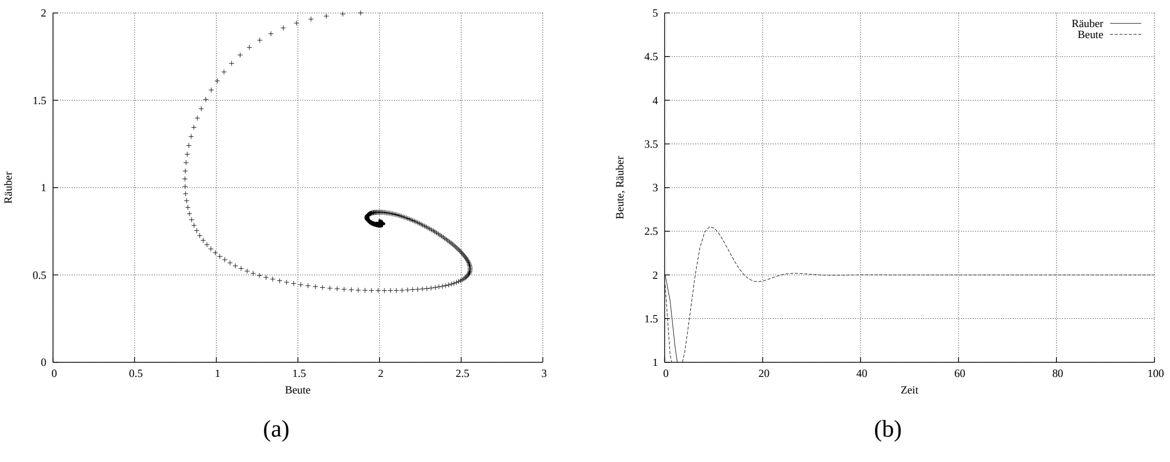
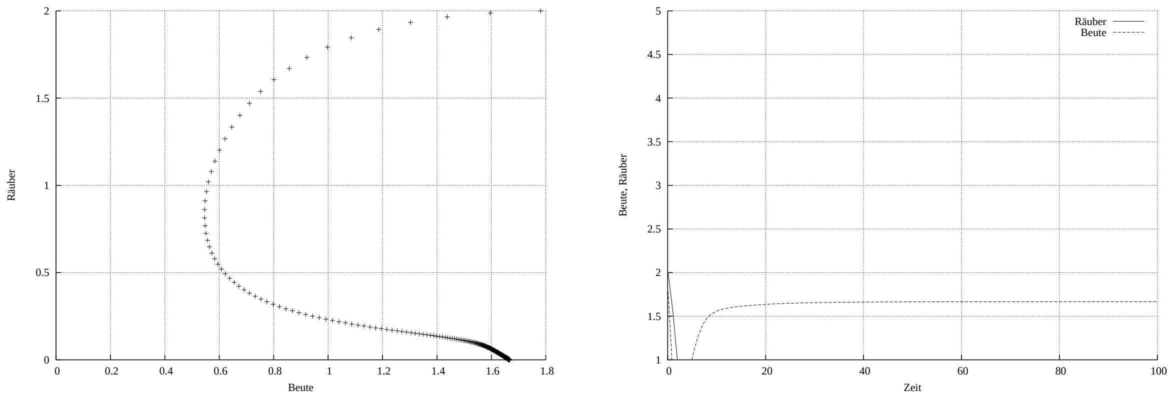
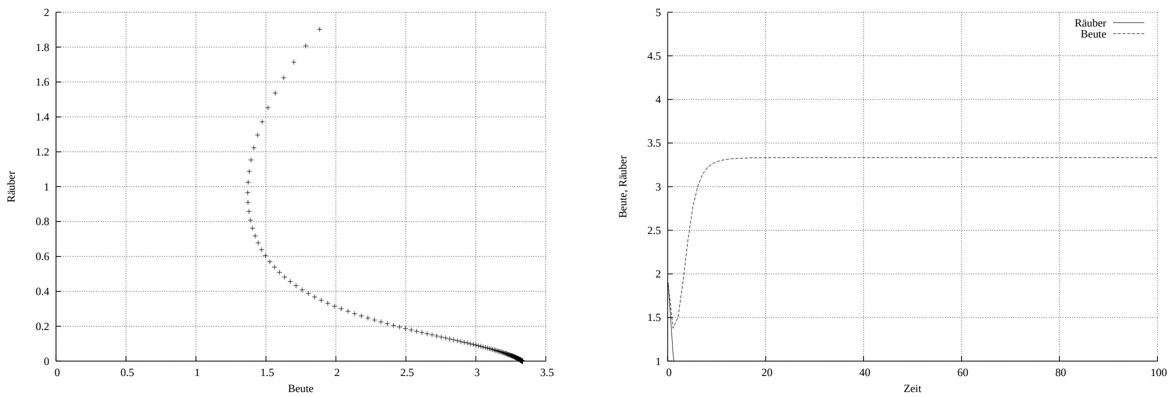


Abbildung 3: Phasendiagramm (a) und Zeitdiagramm (b) des Räuber-Beute-Modells mit den Parametern $(\delta, \kappa, \varepsilon) = (1, 0.5, 0.3)$



(a) (b)

Abbildung 4: Phasendiagramm (a) und Zeitdiagramm (b) des Räuber-Beute-Modells mit den Parametern $(\delta, \kappa, \varepsilon) = (1, 0.5, 0.6)$



(a) (b)

Abbildung 5: Phasendiagramm (a) und Zeitdiagramm (b) des Räuber-Beute-Modells mit den Parametern $(\delta, \kappa, \varepsilon) = (0.5, 0.5, 0.3)$

Aufgabe 2

Wir möchten die stationären Zustände eines Systems, das durch die Differentialgleichung

$$\dot{V} = rV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - \frac{\beta H V^2}{V^2 + V_0^2} \tag{1}$$

beschrieben wird, bestimmen. Diese sind charakterisiert durch die Bedingung $\dot{V} = 0$. Wir suchen daher Lösungen, die diese Bedingung erfüllen. Wir setzen $V \neq 0$ voraus und kommen nicht nennenswert weiter:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} rV - \frac{r}{K}V^2 - \frac{\beta H V^2}{\left(V^2 + V_0^2\right)} \\
&= \left(rV - \frac{r}{K}V^2\right)\left(V^2 + V_0^2\right) - \beta H V^2 \\
&= rV^3 - \frac{r}{K}V^4 + rVV_0^2 - \frac{rV_0^2}{K}V^2 - \beta H V^2 \\
&= -\frac{r}{K}V^3 + rV^2 - V\left(\frac{rV_0^2}{K} + \beta H\right) + rV_0^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Es gilt, die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades zu bestimmen. Wir sind trotz häufig wiederholter Ansätze über verschiedene Methoden (nach verschiedenen Formelsammlungen und mit Maple) zu keinem brauchbaren Ergebnis gekommen. Auch der Ansatz, eine Nullstelle durch „scharfes Hinsehen“ zu finden und danach per Polynomdivision ein Polynom zweiten Grades zu erzeugen, scheiterte daran, daß es unserer Ansicht nach keine einfach zu ermittelnde Nullstelle gibt. Selbst der triviale Ansatz $V = 0$ liefert nur dann eine Nullstelle, wenn gleichzeitig $V_0 = 0$ vorausgesetzt wird.

Aufgabe 2 – Nachtrag[1]

Wir möchten die stationären Zustände eines Systems, das durch die Differentialgleichung

$$\dot{V} = rV - \frac{\beta H V^2}{V^2 + V_0^2} \tag{3}$$

beschrieben wird, bestimmen. Diese sind charakterisiert durch die Bedingung $\dot{V} = 0$. Wir suchen daher Lösungen, die diese Bedingung erfüllen.

Man erkennt die erste triviale Lösung $V_1 = 0$. Wir nehmen $V \neq 0$ an und suchen weitere Nullstellen:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} rV - \frac{\beta H V^2}{\left(V^2 + V_0^2\right)} \\
&= rV\left(V^2 + V_0^2\right) - \beta H V^2 \\
&= rV^3 + rVV_0^2 - \beta H V^2 \\
&= V^2 - \frac{\beta H}{r}V + V_0^2
\end{aligned} \tag{4}$$

[1] Cora hat am Montag, dem 12. Dezember erst ganz spät bemerkt, daß ein „Fehler“ in der Aufgabe war, der zu dem umschönen Polynom dritten Grades führte. Prinzipiell ist zwar oben gezeigte Lösungsansatz auch richtig, allerdings kommt bei der Lösung mit Hilfe von Maple ein sehr unschöner Bandwurm-Ausdruck heraus. Dieser Nachtrag behandelt die korrigierte Aufgabenstellung.

Das Polynom hat die Form $V^2 + pV + q = 0$ mit $p = -\frac{\beta H}{r}$ und $q = V_0^2$. Mit Hilfe der p-q-Formel ergeben sich die Lösungen:

$$V_{2/3} = \frac{\beta H}{2r} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 H^2}{4r^2} - V_0^2} \tag{5}$$

Da wir ein reales System betrachten, sind nur reellwertige Lösungen zulässig, d.h. wir müssen

$$V_0^2 \leq \frac{\beta^2 H^2}{4r^2}$$

fordern.

Für alle folgenden Betrachtungen der stationären Zustände setzen wir für die Parameter die Werte $r = \beta = V_0 = 1$. Abbildung 6 zeigt den Verlauf der stationären Zustände im V-H-Diagramm unter dieser Voraussetzung.

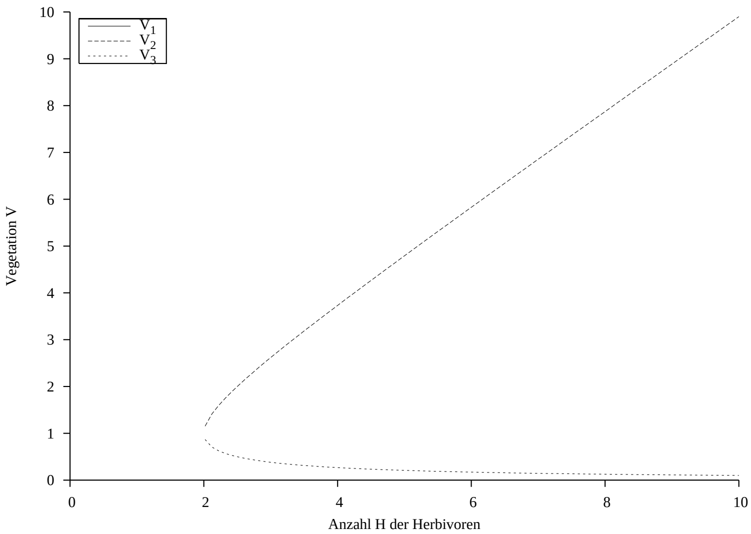


Abbildung 6: V-H-Diagramm der drei stationären Zustände $V_{1/2/3}$ (mit $r = \beta = V_0 = 1$)

Der stationäre Zustand $V_1 = 0$ existiert unabhängig von den gewählten Parametern, was ob des Modells auch zu erwarten ist. Wo keine Vegetation vorhanden ist, wird sich auch nichts ändern.

Die stationären Zustände $V_{2/3}$ existieren für $H \geq 2$. Da unser Modell die Realität abbildet, sind nur reellwertige stationäre Zustände von Interesse. Bei genauerer Betrachtung des Ausdrucks (5) erkennt man, daß der Term unter der Wurzel für $H < 2$ kleiner Null ist, d.h. die Wurzel und damit der komplette Ausruck nimmt einen komplexen Wert an. Für $H = 2$ hat der Wurzelterm den Wert Null, d.h. es folgt $V_2 = V_3$. Für alle $H > 2$ läßt sich der Wert des Wurzelterms nach oben abschätzen:

$$\sqrt{\frac{H^2}{4} - 1} < \sqrt{\frac{H^2}{4}} = \frac{H}{2}$$

Wir erkennen, daß für alle $H > 2$ alle drei stationären Zustände existieren.

Um eine Aussage über die Stabilität der stationären Zustände für $H = 3$ machen zu können, bilden wir zunächst die Ableitung der gegeben Differentialgleichung nach V und setzten dann die Werte

$V_{1/2/3}(H=3)$ der stationären Zustände ein.

$$\begin{aligned}
\gamma_{1/2/3} &= \frac{\mathrm{d}f(V_{1/2/3})}{\mathrm{d}V} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(rV - \beta\frac{HV^2}{V^2+V_0^2}\right) \\
&= r - \beta\frac{(2HV)(V^2+V_0^2)-(HV^2)(2V)}{\left(V^2+V_0^2\right)^2} \\
&= r - \beta\frac{2HV_0^2V}{\left(V^2+V_0^2\right)^2} && (6) \\
&= 1 - \frac{6V}{\left(V^2+1\right)^2} \quad \text{mit } r=\beta=V_0=1 \text{ und } H=3 && (7)
\end{aligned}$$

Untersuche nun das Vorzeichen von $\gamma_{1/2/3}$, welches die Stabilität der stationären Zustände bestimmt.

$$\gamma_1 = 1 - \frac{6\cdot 0}{(0+1)^2} = 1 > 0 \qquad \Rightarrow V_1(H=3) \text{ ist instabil.} \tag{8}$$

$$\gamma_2 = 1\frac{6\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-1}\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-1}\right)^2+1\right)^2} \approx 0.75 > 0 \qquad \Rightarrow V_2(H=3) \text{ ist instabil.} \tag{9}$$

$$\gamma_3 = 1\frac{6\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-1}\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-1}\right)^2+1\right)^2} \approx -0.75 < 0 \qquad \Rightarrow V_3(H=3) \text{ ist stabil.} \tag{10}$$

Aufgabe 3

Bei dem gegebenen Modell handelt es sich offenbar um ein System von zwei Arten, die sich eine Ressource des gleichen Lebensraums teilen.

Die Populationszunahme der Art X wird zum Einen durch die bereits vorhandenen Individuen beeinflußt, zum Anderen wirkt die Konkurrenz der Art Y auf die Population ein. Der linke Teil der Gleichung beschreibt ein durch einen Kapazitätsterm α_1 begrenztes logistisches Wachstum mit der Wachstumsrate β_1. Der rechte Teil trägt dem Faktum Rechnung, daß die begrenzten Ressourcen von beiden Arten beansprucht werden.

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\beta_1 X(1-\alpha_1 X)}_{\text{logistisches Wachstum}} - \underbrace{\gamma_1 Y X}_{\text{Konkurrenz-term}}$$

Ohne Anwesenheit der Art Y würde das System X ein normales logistisches Wachstum zeigen. Pro Zeiteinheit wachsen β_1 Individuen der Art X nach. Diese Art lebt offenbar in einem Lebensraum mit begrenzten Ressourcen, denn ihr ansonsten rein exponentielles Wachstum wird durch eine Maximalkapazität α_1 nach oben begrenzt.

Nun gibt es im Lebensraum noch die Art Y, die die gleichen Ressourcen beansprucht. Auch ihre Entwicklung folgt einem begrenzten logistischen Wachstum mit dem Wachstumsparameter β_2 und dem Kapazitätsparameter α_2.

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\beta_2 X(1-\alpha_2 X)}_{\substack{\text{logistisches}\\\text{Wachstum}}} - \underbrace{\gamma_2 XY}_{\substack{\text{Konkurrenz-}\\\text{term}}}$$

Daß beide Arten den gleichen Lebensraum beanspruchen, erkennt man daran, daß sich die Populationen mittels des Konkurrenzterms gegenseitig nach oben begrenzen. Je mehr Individuuen von der eingenen oder von der fremden Art vorhanden sind, desto stärker schrumpft die eigene Population. Die Parameter γ_1 und γ_2 beschreiben dabei nur, wie ‚gut' die jeweilige Art den noch vorhandenen respektive den freiwerdenen Lebensraum besiedelt.

Das Modell könnte z.B. die Populationsentwicklung von zwei Wildtierarten in einem Nationalpark beschreiben, die beide die gleiche Nahrungsgrundlage haben. Als Beispiel seien hier Gnus und Zebras angeführt.

Aufgabe 4

Es gibt zwei einfache Beweise für die Tatsache, daß $5 = 4$.

Erster Beweis

Sei $a + b = c$ für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} a + b &= c \\ a + b - 5c &= -4c \\ 5a + b - 5c &= 4a - 4c \\ 5a + 5b - 5c &= 4a + 4b - 4c \\ 5(a + b - c) &= 4(a + b - c) \\ 5 &= 4 \end{aligned}$$

Stimmt das?

Zweiter Beweis

Es ist leicht einzusehen, daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
\sqrt{\frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\
\sqrt{25 - 45 + 20 + \frac{1}{4}} &= \sqrt{16 - 36 + 20 + \frac{1}{4}} \\
\sqrt{5^2 - 5 \cdot 9 + \frac{80}{4} + \frac{1}{4}} &= \sqrt{4^2 - 4 \cdot 9 + \frac{80}{4} + \frac{1}{4}} \\
\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2} &= \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2} \\
\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} \\
5 - \frac{9}{2} &= 4 - \frac{9}{2} \\
5 &= 4
\end{aligned}
$$

Stimmt das?