Mathematische Modellierung
Lösungen zum 8. Übungsblatt

Klaus G. Blümel Lars Hoegen

5. Januar 2006

Aufgabe 1

(a)

Gegeben ist ein Gleichungssystem

$$\dot{L} = \alpha L - \mu L - \mu\varepsilon L^2 - \gamma L \tag{1}$$
$$\dot{A} = \gamma L - \delta A \tag{2}$$

das eine Fischpopulation beschreibt. L ist dabei die Anzahl der Larven, A die der Adulten.

Der Faktor δ beschreibt die Sterberate der erwachsenen Fische, die Zahl der Adulten nimmt proportional zur vorhandenen Anzahl ab. Der Faktor γ kann als Übergangsrate bezeichnet werden. In der ersten Gleichung sorgt er für eine Begrenzung der Larvenzahl in Abhängigkeit von der vorhandenen Larvenzahl, in der zweiten Gleichung sorgt er für einen Zuwachs der Adultenpopulation. Insgesamt beschreibt γ also, wie viele Larven das Erwachsenenstadium erreichen. Die zweite Gleichung ist damit vollständig beschrieben.

In der ersten Gleichung tauchen noch Konstanten α, μ und ε auf. α wirkt positiv auf die Wachstumsrate der Larven, in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Larven. Man kann α demnach als Wachstumsrate bezeichnen. Paradoxerweise hängt der Populationszuwachs nicht von der Zahl der Adulten ab, d.h. die Larven müssen fruchtbar sein und für Nachwuchs sorgen.

μ und ε wirken mit negativem Vorzeichen auf die Populationszunahme der Larven. Da beide in linearer bzw. quadratischer Abhängigkeit von der Larvenanzahl stehen, kann man sie als intraspezifische Konkurrenzterme bezeichnen. Je mehr Larven vorhanden sind, desto weniger Ressourcen stehen zur Verfügung, d.h. desto weniger Larven überleben und können für Nachwuchs sorgen, womit die Populationszunahme absinkt.

(b)

Unter den Voraussetzungen $\alpha = 2$ und $\varepsilon = \delta = \mu = 1$ vereinfacht sich das gegeben Modell zu:

$$\dot{L} = L - L^2 - \gamma L = (1-\gamma)L - L^2 \qquad := f(L, A) \tag{3}$$
$$\dot{A} = \gamma L - A \qquad := g(L, A) \tag{4}$$

Wir bestimmen zunächst Werte (L^*, A^*), für die ein stationärer Zustand vorliegt, d.h. für die $f(L, A) = 0 \wedge g(L, A) = 0$ gilt. Gleichung (3) wird für $L \in \{0, (1-\gamma)\}$ gleich Null, d.h. es kommen als stationäre Zustände die Wertepaare

1. $(L^*, A^*)_1 = (0, 0)$
2. $(L^*, A^*)_2 = (1-\gamma, \gamma-\gamma^2)$

in Frage. γ kann somit jeden beliebigen positiven Wert annehmen, denn Werte $\gamma \leq 0$ machen im gegebenen Modell keinen Sinn.

(c)

Zur Untersuchung der Stabilität der in (b) bestimmten stationären Zustände bilden wir zunächst die Jacobimatrix des Gleichungssystems (3) und (4):

$$\mathfrak{J}(L, A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(L,A)}{\partial L} & \frac{\partial f(L,A)}{\partial A} \\ \frac{\partial g(L,A)}{\partial L} & \frac{\partial g(L,A)}{\partial L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma-2L & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Setzen wir nun die stationären Zustände ein, können wir Aussagen über die Stabilität treffen.

Es ist

$$\mathfrak{J}(L^*, A^*)_1 = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit $\det \mathfrak{J} = 1-\gamma$ und $\operatorname{spur} \mathfrak{J} = 2-\gamma$.

Unterscheide die folgenden Fälle:

1. Da $\operatorname{spur} \mathfrak{J} > \det \mathfrak{J}$ für alle γ, existieren keine γ, für die $\operatorname{spur} \mathfrak{J} < 0$ *und* $\det \mathfrak{J} > 0$ erfüllt wäre, d.h. es gibt kein γ, für das $(L^*, A^*)_1$ stabiler stationärer Zustand wäre.
2. Für alle $\gamma > 1$ ist $\det \mathfrak{J} < 0$ und $(L^*, A^*)_1$ ist instabiler stationärer Zustand.
3. Für alle $0 < \gamma \leq 1$ ist $\operatorname{spur} \mathfrak{J} > 0$ und $(L^*, A^*)_1$ ist instabiler stationärer Zustand.

Es gibt keine γ, für die eine Entscheidung über die Stabilität nicht möglich ist, daher ist $(L^*, A^*)_1$ instabiler stationärer Zustand.

Es ist

$$\mathfrak{J}(L^*, A^*)_2 = \begin{pmatrix} -1+\gamma & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit $\det \mathfrak{J} = -1+\gamma$ und $\operatorname{spur} \mathfrak{J} = \gamma$.

Da im gegeben Modell $\gamma > 0$, ist auch $\operatorname{spur} \mathfrak{J} > 0$ und $(L^*, A^*)_2$ ist instabiler stationärer Zustand für alle γ.

Aufgabe 2

(a)

Zu Bestimmen sind die stationären Zustände eines konkurrierenden Systems mit den Zustandsgleichungen:

$$\dot{x} = x(1 - x - \gamma_1\, y) \qquad := f(x, y) \tag{8}$$
$$\dot{y} = y(1 - y - \gamma_2\, x) \qquad := g(x, y) \tag{9}$$

unter den Voraussetzungen $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ und $x, y \geq 0$.

Wir suchen Wertepaare (x^*, y^*), die die Bedingung $f(x, y) = 0 \wedge g(x, y) = 0$ für stationäre Zustände erfüllen. Gleichung (8) nimmt den Wert Null für $x_1 = 0$ oder für

$$(1 - x - \gamma_1\, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = (1 - \gamma_1\, y)$$

an. Wegen der symmetrischen Struktur der gegeben Gleichungen gilt für $g(x, y)$ prinzipiell dasselbe. Gleichung (9) nimmt den Wert Null für $y_1 = 0$ oder für $y_2 = (1 - \gamma_2\, x)$ an.

Insgesamt gibt es jetzt vier Möglichkeiten die beiden Funktionen gleichzeitig Null werden zu lassen:

1. $x = 0$ und $y = 0$,
2. $x = 0$ und $y = (1 - \gamma_2\, x) \overset{x=0}{=} 1$,
3. $x = (1 - \gamma_1\, y) \overset{y=0}{=} 1$ und $y = 0$ sowie
4. $x = (1 - \gamma_1\, y)$ und $y = (1 - \gamma_2\, x)$

Bei der vierten Möglichkeit kann man wechselseitig einsetzten und so y bzw. x eliminieren:

$$\begin{aligned}
& x = 1 - \gamma_1\, y = 1 - \gamma_1(1 - \gamma_2\, x) = 1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\, x \\
\Leftrightarrow \quad & x(1 - \gamma_1\gamma_2) = 1 - \gamma_1 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{1 - \gamma_1}{1 - \gamma_1\gamma_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y = 1 - \gamma_2\, x = 1 - \gamma_2(1 - \gamma_1\, y) = 1 - \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 y \\
\Leftrightarrow \quad & y(1 - \gamma_1\gamma_2) = 1 - \gamma_2 \\
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1\gamma_2}
\end{aligned}$$

Daraus resultieren die vier stationären Zustände:

1. $(x^*, y^*)_1 = (0, 0)$
2. $(x^*, y^*)_2 = (0, 1)$
3. $(x^*, y^*)_3 = (1, 0)$
4. $(x^*, y^*)_4 = (\frac{1-\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2}, \frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1\gamma_2})$

(b)

Um die Stabilität der stationären Zustände zu bestimmen müssen die Werte der stationären Zustände in die Jacobi-Matrix eingesetzt werden. Wir bilden daher zunächst die Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2x-\gamma_1\,y & -\gamma_1\,x \\ -\gamma_2\,y & 1-2y-\gamma_2\,x \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10}$$

Wir setzen nun der Reihe nach die Werte für die stationären Zustände ein und überprüfen die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix auf die Stabilitätskriterien.

1. $\mathfrak{J}(x^*,y^*)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\operatorname{spur}\mathfrak{J}(x^*,y^*)_1 = 1+1 = 2 > 0$ für alle (γ_1,γ_2), d.h. $(x^*,y^*)_1$ ist instabiler stationärer Zustand.

2. $\mathfrak{J}(x^*,y^*)_2 = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1 & 0 \\ -\gamma_2 & -1 \end{pmatrix}$

   $\operatorname{spur}\mathfrak{J}(x^*,y^*)_2 = 1-\gamma_1-1 = -\gamma_1 < 0$, da n.V. $\gamma_1 > 0$.

   $\det\mathfrak{J}(x^*,y^*)_2 = -1+\gamma_1$ ist $\begin{cases} <0 & \text{für } \gamma_1 < 1 \\ =0 & \text{für } \gamma_1 = 1 \\ >0 & \text{für } \gamma_1 > 1 \end{cases}$

   Damit ist $(x^*,y^*)_2$ für $\gamma_1 < 1$ instabiler und für $\gamma_1 > 1$ stabiler stationärer Zustand. Für $\gamma_1 = 1$ können wir keine Entscheidung treffen. Dies gilt für beliebige γ_2.

3. $\mathfrak{J}(x^*,y^*)_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\gamma_1 \\ 0 & 1-\gamma_2 \end{pmatrix}$

   $\operatorname{spur}\mathfrak{J}(x^*,y^*)_3 = -1+1-\gamma_2 = -\gamma_2 < 0$, da n.V. $\gamma_2 > 0$.

   $\det\mathfrak{J}(x^*,y^*)_3 = -1+\gamma_2$ ist $\begin{cases} <0 & \text{für } \gamma_2 < 1 \\ =0 & \text{für } \gamma_2 = 1 \\ >0 & \text{für } \gamma_2 > 1 \end{cases}$

   Damit ist $(x^*,y^*)_2$ für $\gamma_2 < 1$ instabiler und für $\gamma_2 > 1$ stabiler stationärer Zustand. Für $\gamma_2 = 1$ können wir keine Entscheidung treffen. Dies gilt für beliebige γ_1.

4. $\mathfrak{J}(x^*,y^*)_4 = \dfrac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 - 1 & \gamma_1(\gamma_1-1) \\ \gamma_2(\gamma_2-1) & \gamma_2 - 1 \end{pmatrix}$

   Wir untersuchen die Bedingung für einen stabilen stationären Zustand, d.h. wir suchen (γ_1,γ_2) derart, daß $\operatorname{spur}\mathfrak{J} < 0$ und $\det\mathfrak{J} > 0$.

   $\operatorname{spur}\mathfrak{J}(x^*,y^*)_4 = \dfrac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \cdot (\gamma_1+\gamma_2-2)$

   Für welche (γ_1,γ_2) ist $\operatorname{spur}\mathfrak{J}$ negativ? Unterscheide die Fälle:

   (a) $(1-\gamma_1\gamma_2) > 0$, d.h. $\gamma_1\gamma_2 < 1$.
   $\operatorname{spur}\mathfrak{J}$ wird unter dieser Annahme nur dann kleiner Null, wenn $(\gamma_1+\gamma_2-2) < 0$ bzw. wenn $\gamma_1+\gamma_2 < 2$.

(b) $(1 - \gamma_1\gamma_2) < 0$, d.h. $\gamma_1\gamma_2 > 1$.
$\operatorname{spur}\mathfrak{J}$ wird unter dieser Annahme nur dann kleiner Null, wenn $(\gamma_1 + \gamma_2 - 2) > 0$ bzw. wenn $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$.

Für welche (γ_1, γ_2) ist $\det\mathfrak{J}$ positiv?

$$\begin{aligned}\det\mathfrak{J}(x^*, y^*)_4 &= \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left((\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)\right)\\ &= \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left((\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(1 - \gamma_1\gamma_2)\right)\\ &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass für $\gamma_1 < 1$ und $\gamma_2 < 1$ die Determinante einen positiven Wert hat. Damit ist aber $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, d.h. nur im oben diskutierten Fall (a) liegt ein stabiler stationärer Zustand vor.

Die nicht entscheidbaren Fälle liegen für $\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \;\Rightarrow\; \det\mathfrak{J} = 0$ oder $(\gamma_1 + \gamma_2) = 2 \;\Rightarrow\; \operatorname{spur}\mathfrak{J} = 0$ vor.

Zusammengefasst: $(x^*, y^*)_4$ ist für $0 < \gamma_1 < 1$ und $0 < \gamma_2 < 1$ ein stabiler stationärer Zustand und für alle $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{(\gamma_1, \gamma_2)|\gamma_1 \geq 1$ und $\gamma_2 \geq 1$ und $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 2\}$ instabiler stationärer Zustand.

Zu den Fällen 2 und 3 haben wir noch einige weitergehende Überlegungen angestellt.

Für den stationären Zustand $(x^*, y^*)_3 = (1, 0)$ haben wir ermittelt, das er stabil ist, wenn die Bedingung $\gamma_2 > 1$ erfüllt ist. Ganz naiv haben wir angenommen, das er auch eintritt, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Dabei haben wir den Parameter γ_2 außer acht gelassen weil er ja auch bei der Berechnung der Stabilität des dritten stationären Zustands nicht auftritt. Aus der Stabilitätsbestimmung des zweiten stationären Zustands wissen wir aber, dass er für $\gamma_1 > 1$ stabil ist. Auch hier ist aufgrund der Rechnung nicht klar wann er eintritt!

Was passiert, wenn beide Bedingungen erfüllt sind, d.h. für $\gamma_1 > 1$ und $\gamma_2 > 1$? Auf welchen Zustand stellt sich das System dann ein, und vor allen Dingen, warum und wie kann man diese Verhalten vorab bestimmen? Wir haben ein Programm geschrieben, dass die Aufgabe mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung nachbildet.

Unterscheide die Fälle

$\gamma_1 < 1$ **und** $\gamma_2 > 1$**:** Das System läuft unabhängig von den Startwerten immer zum dritten stationären Zustand hin, wie es zu erwarten war. Je dichter die beiden Parameter (von beiden Seiten her) an die 1 heranrücken, desto länger dauert es, bis der stationäre Zustand eintritt.

$\gamma_1 > 1$ **und** $\gamma_2 < 1$**:** Das System läuft unabhängig von den Startwerten immer zum zweiten stationären Zustand hin, wie es zu erwarten war. Je dichter die beiden Parameter (von beiden Seiten her) an die 1 heranrücken, desto länger dauert es, bis der stationäre Zustand eintritt.

$\gamma_1 > 1$ **und** $\gamma_2 > 1$**:** Das Verhalten des System ist jetzt schwieriger vorher zu sagen. Sowohl das Verhältnis der Startwerte x_0 und y_0 zueinander wie auch das Verhältnis der beiden Parameter γ_1 und γ_2 nehmen Einfluss auf den stationären Zustand, den das System abschließend einnimmt:

- $\gamma_1 < \gamma_2$ und $x_0 = y_0$: Das System läuft zum dritten stationären Zustand, d.h. γ_2 dominiert das System.

- $\gamma_1 > \gamma_2$ und $x_0 = y_0$: Das System läuft zum zweiten stationären Zustand, d.h. γ_1 dominiert das System.
- $\gamma_1 = \gamma_2$ und $x_0 < y_0$: Das System läuft zum zweiten stationären Zustand, d.h. der kleinere Startwert x_0 ist ein dauerhafter (die Existenz der Population x vernichtender) Nachteil bei ansonsten gleichen Parametern. Die Symmetrie des Systems lässt dieses Verhalten auch einleuchtend erscheinen.
- $\gamma_1 = \gamma_2$ und $x_0 > y_0$: Das System läuft zum dritten stationären Zustand, d.h. der kleinere Startwert y_0 ist ein dauerhafter Nachteil bei ansonsten gleichen Parametern. Die Symmetrie des Systems lässt dieses Verhalten auch einleuchtend erscheinen.
- $\gamma_1 = \gamma_2$ und $x_0 = y_0$: Das System läuft weder zum zweiten noch zum dritten stationären Zustand sondern zu einem Gleichgewicht, d.h. dass wir eher dem vierten stationären Zustand zuordnen würden, obwohl die Bedingungen $\gamma_1 < 1$ und $\gamma_2 < 1$ verletzt werden.