

Mathematische Modellierung

Rezensierte Lösungen zum 9. Übungsblatt

Klaus G. Blümel

Lars Hoegen

20. Januar 2006

Aufgaben 1 und 2

Wir haben das Programm in der Programmiersprache DELPHI geschrieben. Es ist samt Quellcode im Internet verfügbar unter der Adresse

<http://www.atomkraftwerk-springfield.de/reaktor/>.¹

Die Programmoberfläche ist in Abbildung 1 dargestellt. Das Programm modelliert den Modelltrinker in der einfachen Version (Aufgabe 1) mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Die ausgegebenen Parameter sind:

Zeit: Die Zeit seit Trinkbeginn. In der Tabelle wird ein Intervall von sechs Minuten angegeben, obwohl das Programm selbst mit einem Iterationsschritt von $\frac{1}{10}$ Minute rechnet. Insgesamt läuft die Berechnung für 15 Stunden.

M: Die im Magen-Darm-Trakt befindliche Alkoholmenge in Gramm.

B: Die in den Körperflüssigkeiten befindliche Alkoholmenge in Gramm.

P: Der Promillewert, der sich aus der Alkoholmenge pro gesamter Körperflüssigkeit ergibt.

Als Eingabeparameter können die Gesamtmasse des Trinkerkörpers, die getrunkene Alkoholmasse und die Zeit, während der konsumiert wird, variiert werden. Im rechten Teil des Programmfensters kann man dann noch den Aufgabentyp auswählen, der der Modellierung zugrunde gelegt wird. Im Einzelnen sind die Annahmen im Folgenden beschrieben. Schlußendlich besteht die Möglichkeit, die berechneten Werte in eine Datei auszugeben, um sie in andere Programme zu importieren. Wir haben diese Daten mit dem Programm Gnuplot dargestellt (siehe unten).

Der einfache Modelltrinker (Aufgabe 1)

Die Modellierung erfolgt nach dem in der Vorlesung behandelten Gleichungssystem. Die Abbildungen 2 bis 4 auf den Seiten 5 ff. zeigen die zeitliche Entwicklung von Alkoholmenge in Magen-Darm-Trakt und den Körperflüssigkeiten sowie die zeitliche Entwicklung des Promillegehalts. Dabei wird

¹Das Programm ist nach der Methode „quick and dirty“ verfasst. Der Quellcode ist nicht kommentiert, auf eine Dokumentation wird verzichtet und die gewählten Bezeichnungen der Eingabefelder und Buttons beziehen sich auf die Aufgabenstellung. Rückfragen beantwortet der Autor gerne: Klaus-Günter Blümel <K.G.Bluelmel@web.de>

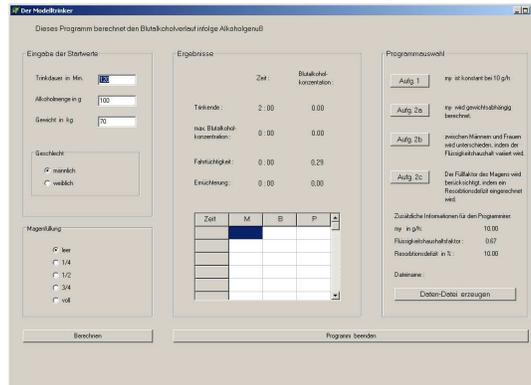


Abbildung 1: Benutzeroberfläche des Modelltrinker-Programms

jeweils ein Parameter variiert (Masse des Trinker, Masse des aufgenommenen Alkohols bzw. Trinkzeit), die anderen beiden Parameter bleiben konstant.

Berücksichtigung des Körpergewichts (Aufgabe 2 a)

Hier wird die gegebene Beziehung für die Abbaurate μ bei anderen Massen berücksichtigt. Abbildung 5 auf Seite 8 zeigt diesen Einfluss in der zeitlichen Entwicklung der Alkoholmenge im Magen und Blut bzw. des Promillewertes. Man erkennt Abweichungen zu Abbildung 2.

Unterscheidung des Geschlechts (Aufgabe 2 b)

Bei einer Internetrecherche stießen wir auf einen Artikel, der unter anderem die wesentlichen Einflüsse von Geschlecht und Mageninhalt auf die Blutalkoholkonzentration beschreibt. Geschlechtsspezifische Unterschiede wurden auf verschiedene Anteile der Flüssigkeitsmenge an der Gesamtmasse des Körpers zurückgeführt. Für Männer liegt der Anteil bei etwa $\frac{2}{3}$, was gut dem Modell aus Aufgabe 1 entspricht. Bei Frauen liegt der Anteil etwas niedriger, etwa bei $\frac{14}{25}$. Diese beiden Werte werden zur Berücksichtigung des Geschlechts in die Berechnung eingebracht.

Abbildung 6 auf Seite 9 zeigt diesen Unterschied im Vergleich für eine Körpermasse von 65 kg bei einer konsumierten Alkoholmenge von 100 g und einer Trinkzeit von zwei Stunden.

Cora's Anmerkung: „Zusätzlich ist die Abbaurate verschieden (bei Männern größer)“

Berücksichtigung des Mageninhalts (Aufgabe 2 c)

Um den Einfluss des Mageninhalts zu berücksichtigen, führen wir einen Resorptionskoeffizienten ein. Der oben genannte Artikel besagt nur, dass je nach Magenfüllstand etwa 10% bis 30% des getrunkenen Alkohols nicht aufgenommen werden. Der Einfachheit halber modellieren wir diesen Vorgang linear und in diskreten Schritten. Diese sind in Tabelle 1 verzeichnet.

Cora's Anmerkung: „meines Wissens wird die Aufnahme durch vollen Magen nur verlangsamt“

Abbildung 7 auf Seite 10 zeigt die Wirkung der Magenfüllung bei Frauen anhand der zeitlichen Entwicklung von Alkoholmenge im Magen-Darm-Trakt und in den Körperflüssigkeiten bzw. des Promil-

Magenfüllstand	leer	$\frac{1}{4}$ voll	$\frac{1}{2}$ voll	$\frac{3}{4}$ voll	voll
Anteil des nicht resorbierten Alkohols	10%	15%	20%	25%	30%

Tabelle 1: Einfluss des Magenfüllstands auf den Alkoholtransfer vom Magen in das Blut

lewertes. Abbildung 8 stellt die entsprechenden Diagramme für Männer dar.

Vergleich zum Internet-Promillerechner (Aufgabe 2 d)

Bei Vergleich unseres Programmes mit dem unter dem angegebenen URL zu findenden Promillerechner stellten wir fest, dass unser Programm tendenziell etwas kürzere Zeiten zum Abbau der gesamten Alkoholmenge berechnet. Ein grafischer Vergleich veranlasste uns zu der Annahme, dass beim Internetprogramm die Halbwertszeit T_H länger sein muss, da für die Alkoholaufnahme in den Körper tendenziell ein längerer Zeitraum erkennbar war.

Ansonsten stimmten unsere Ergebnisse weitgehend mit denen aus dem Internet überein.

Aufgabe 3

Der Modelltrinker stellt eine authentische Fragestellung dar, anhand derer man ausgehend von einfachen Differentialgleichungen ein praktisches Beispiel aus der mathematischen Modellierung heranziehen kann, das nicht der Physik als klassischem Anwendungsfeld für Differentialgleichungen entspringt.

Der Themenkomplex „Einfache Differentialgleichungen“ steht im Curriculum des Gymnasiums im Verlauf der Klasse 11. Hierbei werden geschlossene Lösungen mithilfe der trigonometrischen Funktionen gesucht, da die Funktionalanalyse meist noch nicht bis zur Exponentialfunktion entwickelt wurde.

Der Modelltrinker bietet nun die Möglichkeit, an einem authentischen Problem ein Gleichungssystem von zwei Differentialgleichungen zu behandeln. In dieser Altersklasse kann man annehmen, dass nahezu alle SchülerInnen bereits Erfahrungen mit Alkoholkonsum gemacht haben; da das Einstiegsalter statistisch schon bei ca. 13 Jahren liegt und Alkoholkonsum gesellschaftlich nur schwach negativ konnotiert ist, kann man sogar davon ausgehen, dass die meisten SchülerInnen bereits über Vollrauscherfahrungen verfügen.

Ausblickend auf den Führerscheinerwerb hat man im Mathematikunterricht nun die Gelegenheit, die Konsequenzen des Alkoholtrinkens aufzuzeigen. Man kann hier noch die Ergebnisse von Reaktionszeitstudien unter Alkoholeinfluss einbringen, zu denen es diverse Materialien z.B. der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung (BzgA) oder von der Polizei gibt. Ein alternativer Einstieg ergibt sich aus der Frage, wie die Promillerechner im Internet eigentlich arbeiten.

Die Herleitung des Gleichungssystems ist weitenteils sehr einfach und leicht verständlich. Zu berücksichtigende Probleme könnten dabei sein:

- Die Aufnahmezeit r müsste über den Logarithmus zur Basis 10 statt über den natürlichen Logarithmus berechnet werden, da die Exponentialfunktion in der Regel noch nicht behandelt wurde.

- Die vereinfachte Beschreibung des Abbaus in der Leber über eine Monod-Funktion kann nur über die Begründung von empirischen Untersuchungen eingeführt werden; sie fällt quasi vom Himmel. Da sie aus SchülerInnen-sicht sicherlich nicht einfach verständlich ist, sollte auf die Erklärung der Parameter besonders geachtet werden.

Cora's Anmerkung: „evtl. mit Biologielehrer gemeinsam erörtern“

- Die Abbaurate und die Michaelis-Konstante müssten ebenfalls empirisch begründet werden.

Nachdem die beiden Differentialgleichungen hergeleitet wurden, kann man sich auf die Suche nach geschlossenen Lösungen machen. Die SchülerInnen verfügen in der Regel schon über Taschenrechner mit Computer-Algebra-System und es bietet sich an, die Suche nach Lösungen den Rechnern zu überlassen. Wenn sie überhaupt eine Lösung finden, so dürfte diese sehr kompliziert und länglich sein (MAPLE liefert eine Lösung, die etwa 400 Zeichen umfasst). Mit anderen Worten: Man zeigt den SchülerInnen, dass die geschlossenen Lösungen im Unterricht kaum verwendbar sind² und motiviert so die Notwendigkeit der Suche anderen Lösungsverfahren.

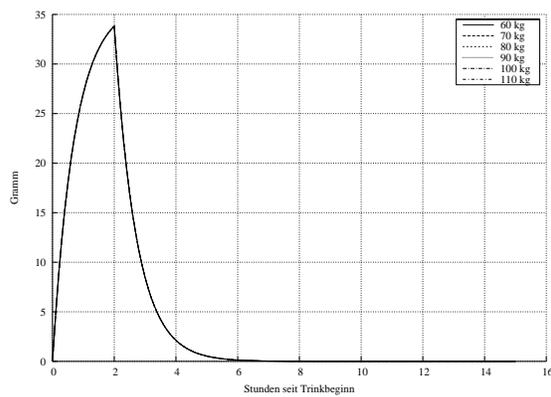
Je nach zur Verfügung stehender Zeit schließen sich nun das Euler-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren zweiter und/oder vierter Ordnung an. Wir würden uns im Unterricht dabei auf die Erläuterung der Grundideen der Verfahren beschränken und die eigentliche Rechenarbeit den Taschenrechnern überlassen, die zumeist schon Programme dafür anbieten. Zur eingängigen Verdeutlichung würden wir sehr häufig die grafische Darstellung der so gewonnenen Werte heranziehen und die SchülerInnen mit den Parametern herumexperimentieren lassen, um ihnen ein Gefühl für das Verhalten des modellierten Systems zu vermitteln. Gegebenenfalls können sich leistungsstarke SchülerInnen um die Entwicklung eines kleinen Programms oder eines Datenblattes einer Tabellenkalkulation kümmern, mit dessen Hilfe man die Werte manipulieren kann und sofort die Ergebnisse sieht.

Die oben beschriebenen Erweiterungen des Modells würden wir außen vor lassen. Sie verkomplizieren das Gleichungssystem und bergen die Gefahr einer Verharmlosung („Männer dürfen mehr trinken als Frauen.“, „Wenn ich mir vorher den Magen vollschlage, darf ich mehr trinken.“³). Man kann diese Phänomene zwar erwähnen, im Sinne einer aufklärerischen Motivation der Unterrichtseinheit sollte aber nicht zu detailliert darauf eingegangen werden.

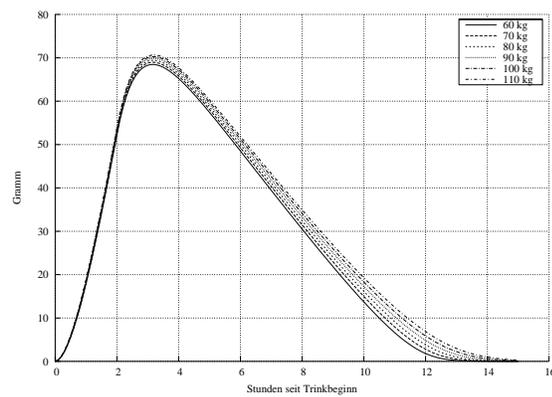
Cora's Anmerkung: „Man kann es natürlich auch in Form eines Differenzgleichungssystems bearbeiten, dann fällt der Teil mit den Integrationsverfahren weg.“

²Aus diesem Grunde eignet sich der Modelltrinker auch kaum als Einstieg in den Themenkomplex Differentialgleichungen.

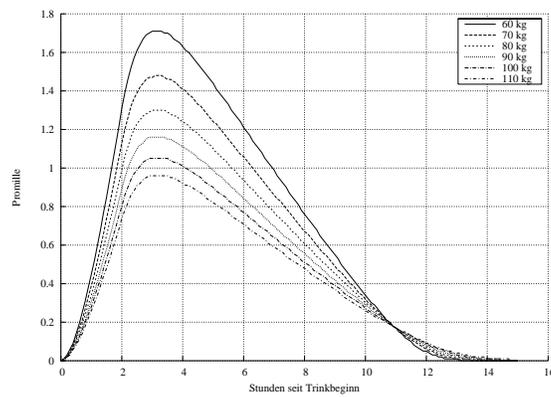
³Nach Cora's Einwand sei hier nachdrücklich darauf hingewiesen, daß **so nicht stimmt**.



(a) Magen-Darm-Trakt

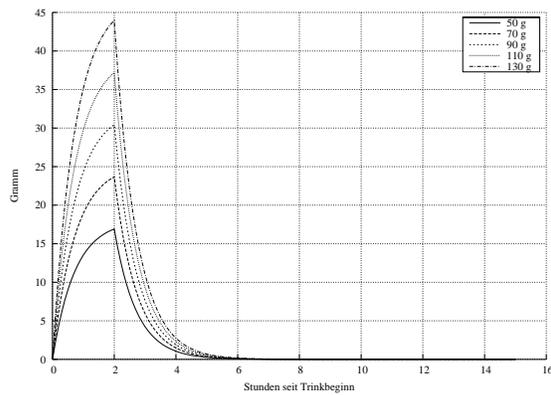


(b) Körperflüssigkeiten

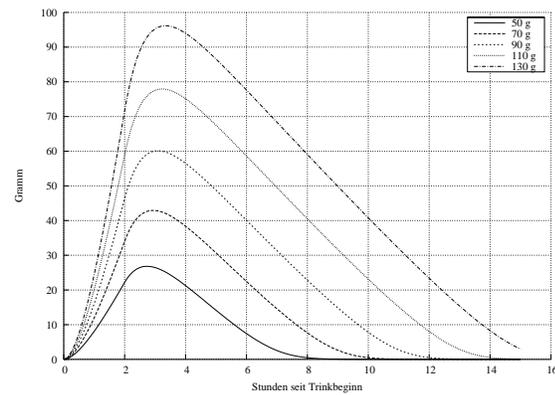


(c) Promillegehalt im Blut

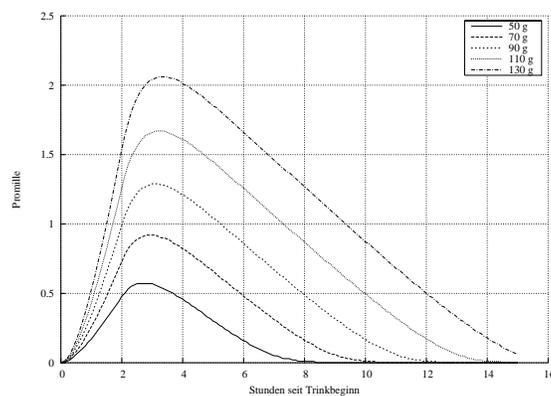
Abbildung 2: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts für verschiedene Körpermassen. Die aufgenommene Alkoholmasse betrug 100 g, die Trinkzeit 2 h.



(a) Magen-Darm-Trakt

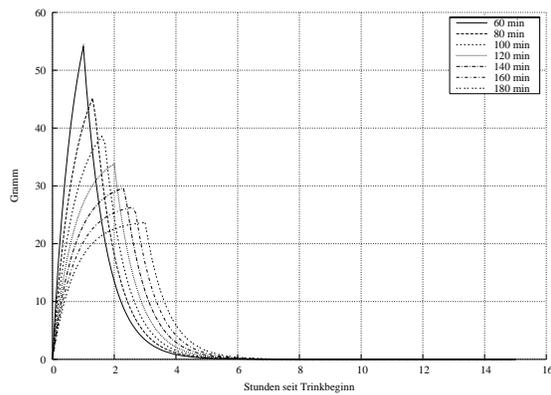


(b) Körperflüssigkeiten

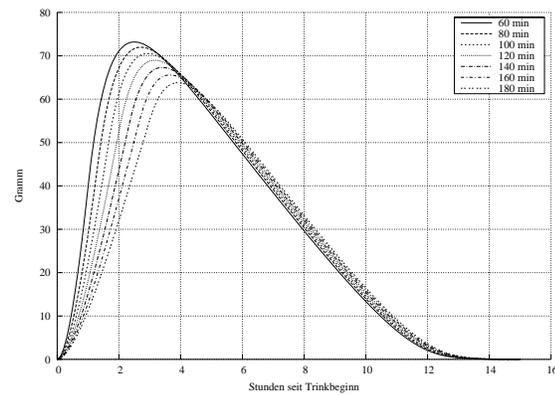


(c) Promillegehalt im Blut

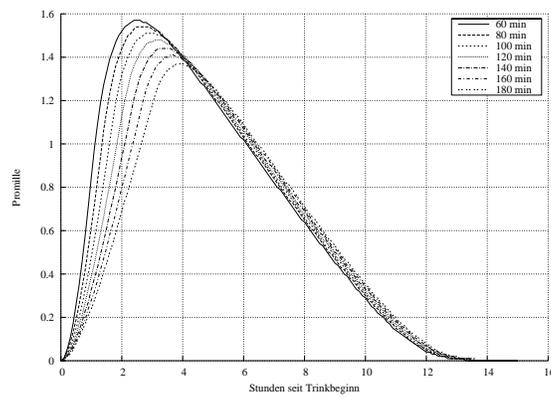
Abbildung 3: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts für verschiedene aufgenommene Alkoholmassen. Die Körpermasse betrug 70 kg, die Trinkzeit 2 h.



(a) Magen-Darm-Trakt

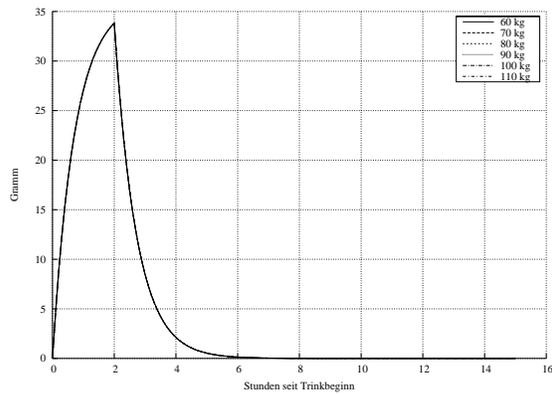


(b) Körperflüssigkeiten

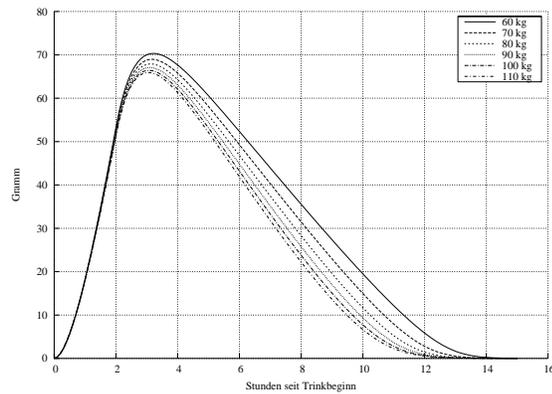


(c) Promillegehalt im Blut

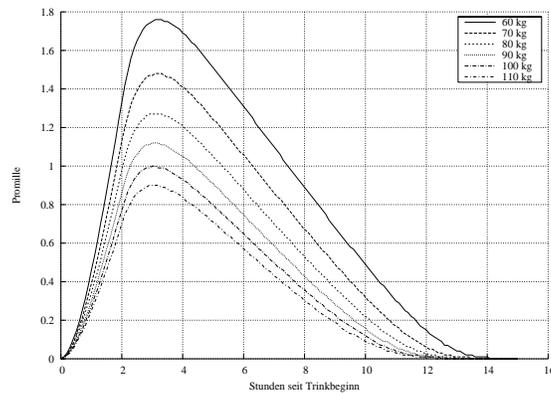
Abbildung 4: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts für verschiedene Trinkzeiten. Die Körpermasse betrug 70 kg, die aufgenommene Alkoholmasse 100 g.



(a) Magen-Darm-Trakt

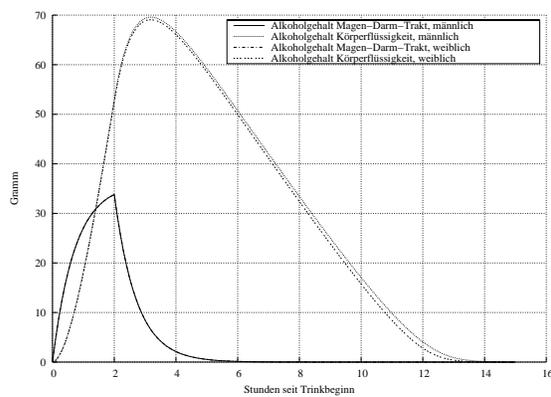


(b) Körperflüssigkeiten

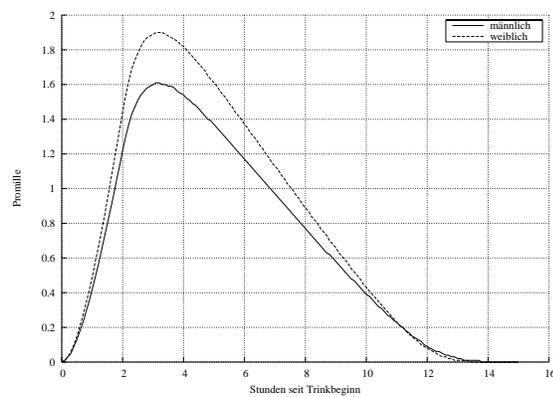


(c) Promillegehalt im Blut

Abbildung 5: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts für verschiedene Körpermassen. Die aufgenommene Alkoholmasse betrug 100 g, die Trinkzeit 2 h; die Abbaurrate μ wurde nach dem Körpergewicht berechnet.

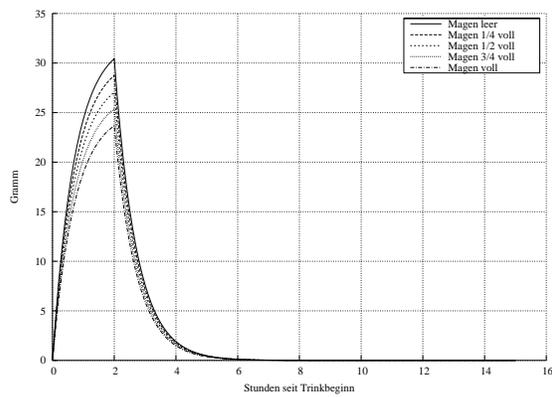


(a) Magen-Darm-Trakt und Körperflüssigkeiten

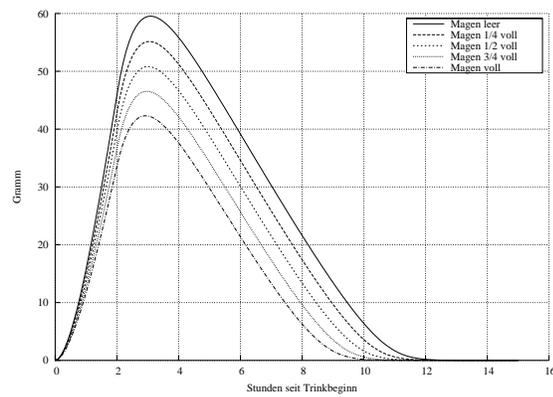


(b) Promillegehalt im Blut

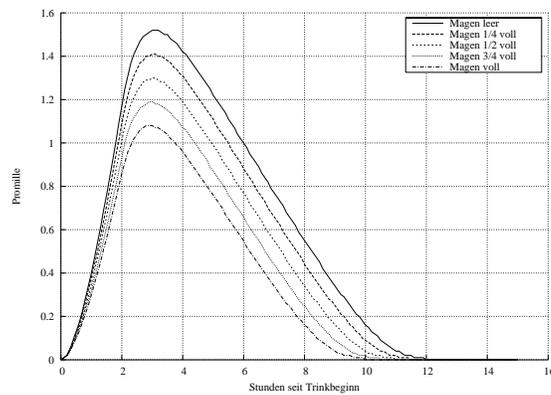
Abbildung 6: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts bei Frauen und Männern. Die Körpermasse betrug 65 kg, die aufgenommene Alkoholmasse 100 g, die Trinkzeit 2 h.



(a) Magen-Darm-Trakt

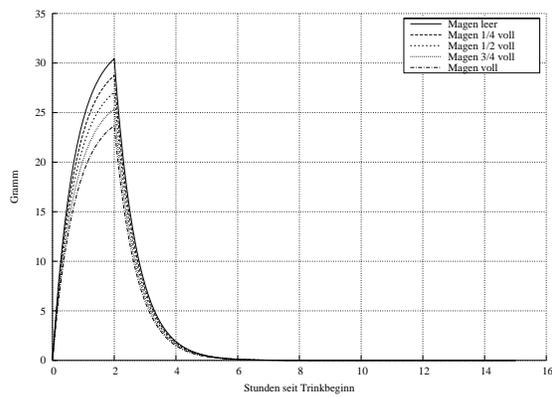


(b) Körperflüssigkeiten

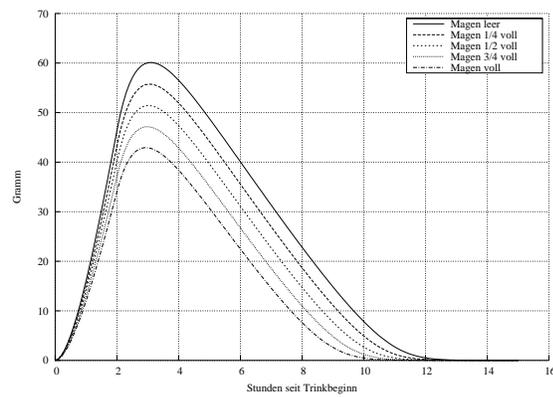


(c) Promillegehalt im Blut

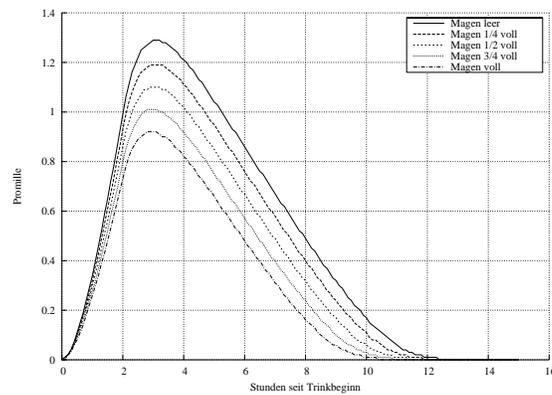
Abbildung 7: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts bei Frauen für verschiedene Magenfüllstände. Die Körpermasse betrug 70 kg, die aufgenommene Alkoholmasse 100 g und die Trinkzeit 2 h; die Abbaurrate μ wurde nach dem Körpergewicht berechnet.



(a) Magen-Darm-Trakt



(b) Körperflüssigkeiten



(c) Promillegehalt im Blut

Abbildung 8: Zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts bei Männern für verschiedene Magenfüllstände. Die Körpermasse betrug 70 kg, die aufgenommene Alkoholmasse 100 g und die Trinkzeit 2 h; die Abbaurrate μ wurde nach dem Körpergewicht berechnet.