

Quantenmechanik für StudentInnen des Lehramts
Unvollendete Mitschrift der Vorlesung von Dr.
Jochen Pade im Wintersemester 2003/04

Lars Hoegen

[homer.simpson@atomkraftwerk-springfield.de]

Version: 1

Letzte Änderung: 28. April 2004

Vorwort

Vorliegendes Skript ist der Beginn einer Abschrift meiner Mitschrift aus der Vorlesung „Quantenmechanik für StudentInnen des Lehramts“, gehalten von Dr. Hans-Jochen Pade im Wintersemester 2003/2004. Es ist noch im Entstehen begriffen und wird von mir sporadisch erweitert – je nachdem, wann ich Zeit dazu finde.

Solange es die Versionsnummer 1 trägt, ist es eine Betaversion. Nach Fertigstellung wird es mit einer fortlaufenden Versionsnummer 2,7... versehen, die sich mit jeder Korrektur dem Wert der Eulerschen Zahl e um eine Nachkommastelle nähert.

Anmerkungen und Fragen an `homer.simpson@atomkraftwerk-springfield.de`

Im April 2004
Lars Hoegen

Kapitel 1

Polarisation

1.1 elektromagnetische Welle, allgemeine Form

Eine elektromagnetische Welle kann allgemein vektoriell beschrieben werden als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (1.1)$$

mit

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Transversalität} \quad (1.2)$$

$$\omega^2 = c\vec{k}^2 \quad \text{Dispersions-Relation} \quad (1.3)$$

Diese Gleichungen wurden in der Vorlesung Elektrodynamik hinreichend beschrieben und vielfach verwandt. Um die Betrachtung etwas zu vereinfachen, ist es sinnvoll, $\vec{k}$ in eine bestimmte Raumrichtung zu legen, z.B. $\vec{k} = (0, 0, k)$. Damit ergibt sich dann

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.4)$$

$$= (E_{0x}, E_{0y}, 0) e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.5)$$

Setze o.B.d.A. $E_{0x} = -e^{i\alpha} |E_{0x}|$ und $E_{0y} = e^{i\beta} |E_{0y}|$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dies führt zu einer weiteren Vereinfachung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (|E_{0x}|, e^{i\delta} |E_{0y}|, 0) e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.6)$$

1.2 lineare und zirkulare Polarisation

Wie kann man die Polarisation von Licht mit Hilfe der vereinfachten Wellengleichung (1.6) darstellen?

Aus Anschauungsgründen betrachten wir in diesem Abschnitt vorerst nur den reellen Anteil:

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} [E_y &= |E_{0y}| e^{i\delta} \cos(kz - \omega t)] \\ \text{besser: } E_y &= |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Für uns sind $\delta = 0$ und $\delta = \pm\pi/2$ von besonderem Interesse.

1.2.1 lineare Polarisation, $\delta = 0$

Für $\delta = 0$ zeigt sich eine lineare Polarisation des Lichtes, denn:

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t) \quad (1.9)$$

$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t) \quad (1.10)$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} \quad \text{bzw.} \quad E_y = \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} E_x \quad (1.11)$$

Jede linear polarisierte Welle lässt sich als Überlagerung von horizontal und vertikal polarisiertem Licht darstellen, siehe Abbildung 1.1.

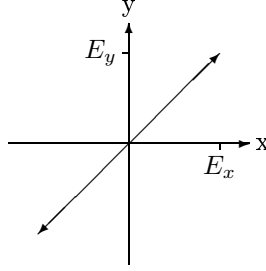


Abbildung 1.1: Skizze zum linear polarisierten Licht

Speziell für $E_x = 0$ und $E_y = 0$ handelt es sich um vertikal bzw. horizontal polarisiertes Licht.

1.2.2 elliptische Polarisation, $\delta = \pm\pi/2$

Ein Spezialfall der elliptischen Polarisation ist das zirkular polarisierte Licht. Es gilt für $\delta = \pm\pi/2$

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t) \quad (1.12)$$

$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \mp |E_{0y}| \sin(kz - \omega t) \quad (1.13)$$

$$1 = \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|} \right)^2 \quad (1.14)$$

Aus der phasenverschobenen Überlagerung von vertikal und horizontal polarisiertem Licht ergibt sich eine elliptische Form, entlang derer der Polarisationsvektor läuft, wie in Abbildung 1.2 dargestellt.

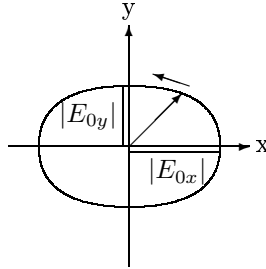


Abbildung 1.2: Skizze zum elliptisch polarisierten Licht

Blickt man in Ausbreitungs-Richtung (nach unserer Konvention in z-Richtung) und sieht, daß die Polarisation im Uhrzeigersinn rotiert, so spricht man von *links polarisiertem Licht*, andernfalls von *rechts polarisiertem Licht*.

1.3 Zusammenfassung

Bisher haben wir folgende Zustände betrachtet:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{horizontal}} &= (|E_{0x}|, 0, 0) e^{i(kz-\omega t)} \\ \vec{E}_{\text{vertikal}} &= (0, |E_{0y}|, 0) e^{i(kz-\omega t)} \\ \vec{E}_{\text{rechts zirkular}} &= (|E_{0x}|, i|E_{0y}|, 0) e^{i(kz-\omega t)} \\ \vec{E}_{\text{links zirkular}} &= (|E_{0x}|, -i|E_{0y}|, 0) e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}$$

Nun kann man diese doch recht lange Art der Darstellung etwas verkürzen, indem man folgende Konventionen festlegt:

1. Die dritte Komponente des Vektors ist immer gleich Null, also weglassen bzw. in zweidimensionale Betrachtung überführen.
2. $e^{i(kz-\omega t)}$ tritt überall auf, dementsprechend weglassen.
3. Bei nur noch zwei Komponenten bietet sich die Schreibweise als Spaltenvektor an.
4. Normierung dieses Vektors auf die Länge 1 wird vereinbart.

Damit schafft man einen Übergang vom dreidimensionalen „Anschauungsraum“ zu einem zweidimensionalen Raum, dem sog. *Zustandsraum*. Ab dieser Stelle betrachten wir nur noch diesen.

Im Zustandsraum werden die Polarisationen wie folgt beschrieben:

- horizontal polarisiertes Licht:

$$|H\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

- vertikal polarisiertes Licht:

$$|V\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

- rechts zirkular polarisiertes Licht:

$$|R\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

- links zirkular polarisiertes Licht:

$$|L\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Wie hängen die Zustände zusammen¹?

$$|R\rangle = \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}} \quad |L\rangle = \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.19)$$

$$|H\rangle = \frac{|R\rangle + |L\rangle}{\sqrt{2}} \quad |V\rangle = \frac{|R\rangle - |L\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.20)$$

¹Mathematisch wird hier eine Basistransformation im zweidimensionalen Vektorraum beschrieben.

Ein solches System ist charakteristisch für die Quantenmechanik. Man vereinfacht zunächst die Betrachtung und stellt dann Zusammenhänge fest.

1.4 Intensität und Betragsquadrat

$|R\rangle$ sei gegeben. Schicke $|R\rangle$ durch einen Analysator, der nur die Intensität von $|H\rangle$ und $|V\rangle$ untersuchen kann. Mit welchen Intensitäten werden diese beiden Zustände detektiert?

In der klassischen Wellenmechanik würde hier das Gesetz von Malus greifen, nach dem die Intensität durch das Betragsquadrat der Amplitude beschrieben wird.

In der Quantenmechanik hingegen wird die Intensität durch den (einfachen) Betrag der Amplitude beschrieben.² D.h. für die Intensität von $|H\rangle$ am Analysator gilt³

$$|H\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (1.21)$$

und analog für $|R\rangle$

$$|R\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

Allgemein formuliert gilt für einen beliebigen Zustand $|Z\rangle$

$$|Z\rangle = a |H\rangle + b |V\rangle \quad (1.23)$$

Dabei wird die relative Intensität von $|H\rangle$ durch $|a|^2$ und die von $|V\rangle$ durch $|b|^2$ beschrieben, wobei nach Voraussetzung $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (Normierung) sein muß.

1.5 Licht als Photonen

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse müssen auch für Licht als Photonen gelten, d.h. die Formalismen aus den Gleichungen (1.19) und (1.20) müssen anwendbar sein. Schieße nun auf den o.g. Analysator ein einzelnes Photon, wie in Abbildung 1.3 dargestellt.

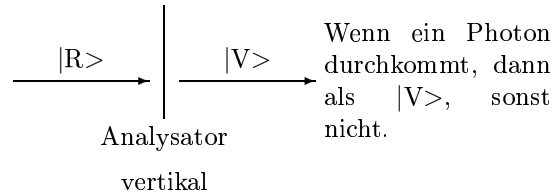


Abbildung 1.3: Ein Photon im Analysator

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes Photon durchkommt, wird beschrieben mit

$$W_{|L\rangle} = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

Es folgt:

²Eine Begründung hierfür folgt in späteren Abschnitten.

³Beachte: Wir betrachten hier im Allgemeinen Werte in den komplexen Zahlen, daher der mathematische Ausdruck des Betrages: $|a|^2 = aa^*$ für $a \in \mathbb{C}$

- Licht (Photonen) kann in mehreren Zuständen gleichzeitig existieren. Ursache: Dynamik ist linear (Superpositionsprinzip).
- Der Koeffizient c eines Zustands ergibt die Wahrscheinlichkeit $|c|^2$, daß der Messung diesen Zustand zu erhalten.
- Nach der Messung ist das Photon in einem definierten Zustand.

1.5.1 Schrödingers Katze

Der Physiker ERNST SCHRÖDINGER, der sich theoretisch mit der Fragestellung der Phontonenzustände auseinandersetzte, beschrieb 1935 ein Gedankenexperiment, welches als Analogie zu den mehrfachen Zuständen eines Photons gesehen werden kann. Es geht sinngemäß wie folgt:

Man nehme eine beliebige Katze und packe sie in eine schwarze, von außen nicht einsehbare Kiste. Dazu packe man eine Apparatur in die Kiste, die eine geschlossene Giftphiole und ein radiokatives Isotop enthält. Die Apparatur sorgt nun dafür, daß die Phiole geöffnet wird, wenn ein Zerfallsteilchen in bestimmter Richtung auf die Phiole trifft.

Nun warte man 2 $\mathfrak{A}$.⁴ Ist die Katze nun tot oder lebendig?

Da der Zerfall des Isotops eine Zufallsgröße darstellt, kann man diese Frage nicht hinreichend beantworten, ohne in die Kiste zu schauen. Das „in die Kiste schauen“ stellt aber einen Meßprozeß dar, mit dem man auch über die Zustände von Photonen Klarheit gewinnt. Bis zu diesem Meßzeitpunkt ist die Katze aber sowohl lebendig als auch tot, zumindest ist dies die einzig sichere Aussage, die man über das System „Katze in schwarzer Kiste“ treffen kann. Bei der Messung ist die Wahrscheinlichkeit, die Katze lebendig anzutreffen, dementsprechend 1/2.

Das hier beschriebene Gedankenexperiment hat in der Quantenmechanik derart nachgewirkt, daß man im englischen Sprachgebrauch auch von *cat state* spricht.

1.6 Operationen im Zustandsraum

Die oben genannten Elemente $|H\rangle$ und $|V\rangle$ bzw. $|L\rangle$ und $|R\rangle$ spannen einen zweidimensionalen komplexen Vektorraum mit den Basen $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ bzw. $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ auf, in dem sich jeder Zustand als Überlagerung der Basenelemente darstellen läßt:

$$|Z\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle \quad \text{bzw.} \quad |Z\rangle = c|R\rangle + d|L\rangle$$

Daher nennen wir diesen Vektorraum *Zustandsraum*.

Wie kann man in diesem Vektorraum nun Längen definieren?

Die Länge von $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ könnte definiert sein als $L^2 = a^2 + b^2$. Dies wäre wenig sinnvoll, denn dann hätte z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ die Länge Null.

Dementsprechend definieren wir die Länge eines Vektors aus dem Zustandsraum als

$$L^2 = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2 \quad (1.25)$$

Um uns Schreibarbeit zu ersparen, formalisieren wir diese Berechnung nach den Gesetzen der Matrixrechnung. Dazu führen wir einen sog. *dualen Raum* ein, der die komplex konjugierten Elemente des Zustandsraumes umfassen soll. Es soll gelten

$$\text{Element}_{\text{dualer Raum}} \text{ verknüpft mit Element}_{\text{Zustandsraum}} \stackrel{!}{=} \text{Zahl}$$

⁴ $\mathfrak{A}$ ist eigentlich keine bestimmte Zeit, außer dass 1 $\mathfrak{A}$ mit dem Attribut „ausreichend lange“ assoziiert wird.

Der Vektorraum umfasst in unserem Fall nur Spaltenvektoren, der duale Raum nur Zeilenvektoren. Es ergibt sich

$$L^2 = \underbrace{(a^*, b^*)}_{\in \text{dualer Raum}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \text{Zustandsraum}} = aa^* + bb^* \quad (1.26)$$

Man erhält (a^*, b^*) aus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ durch

1. Transponieren, d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow (a, b)$ und
2. komplexem Konjugieren, d.h. $(a, b) \rightarrow (a^*, b^*)$.

Man bezeichnet diesen Vorgang als *Adjungieren*⁵, angedeutet durch das Symbol $\dagger$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjung.}} (a^*, b^*) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\dagger \quad (1.27)$$

In der Quantenmechanik sind selbstadjungierende Matrizen, sog. *hermitesche Matrizen* von besonderer Bedeutung. Für sie gilt $M^\dagger = M$.

1.6.1 Der Bracket-Formalismus

Da Quantenmechaniker schreibfaul sind, greift wieder die Klammerschreibweise $|Z\rangle$. Die Elemente des Zustandsraumes notieren wir bisher in der Form $|Z\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Wenn wir nun die Elemente des dualen Raumes als $(a^*, b^*) := \langle Z|$ definieren, ergibt sich:

$$|Z\rangle^\dagger = \langle Z| \quad (1.28)$$

$$\langle Z|^\dagger = |Z\rangle \quad (1.29)$$

Damit hat man eine einfache Schreibweise zur Längenbeschreibung im Vektorraum gefunden, denn die Länge eines Vektors des Zustandsraumes ist $L^2 = \langle Z|Z\rangle$ (man läßt den zweiten vertikalen Strich weg).

Da im Englischen die Klammern $\langle \rangle$ ‚brackets‘ heißen, hat sich die Bezeichnung *bra* für das Symbol $\langle |$ und *ket* für das Symbol $| \rangle$ ergeben. Daher kommt auch die Bezeichnung Bracket-Formalismus für diese Schreibweise.

1.6.2 Beispiele

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |L\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle R|R\rangle = \frac{1}{2}(1-i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 - i \cdot i) = 1$$

$$\langle R|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle H|V\rangle = (1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow |H\rangle \text{ und } |V\rangle \text{ sind zueinander orthogonal}^6$$

Wenn also $\langle H|H\rangle = 1$, dann ist $|H\rangle$ normiert.

⁵auch auf Matrizen anwendbar: $\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 2^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

⁶Das ist auch eine Voraussetzung für eine Basis des Zustandsraumes.

1.6.3 Vollständigkeit

Wähle als Basis des Zustandsraumes die orthogonalen Vektoren $\{|H\rangle, |L\rangle\}$, sowie ein beliebiges $|K\rangle$ aus diesem Vektorraum. Dann ist $|K\rangle$ darstellbar als $|K\rangle = a|H\rangle + b|L\rangle$.

Wie groß sind a und b ?

$$\begin{aligned} \text{Multipliziere von links mit } \langle H|: \quad & \langle H|Z\rangle = a \overbrace{\langle H|H\rangle}^1 + b \overbrace{\langle H|V\rangle}^0 = a \\ \text{analog:} \quad & \langle L|Z\rangle = a \underbrace{\langle V|H\rangle}_0 + b \underbrace{\langle V|V\rangle}_1 = b \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} |Z\rangle &= \langle H|Z\rangle |H\rangle + \langle V|Z\rangle |V\rangle \\ &= |H\rangle \langle H|Z\rangle + |V\rangle \langle V|Z\rangle \\ &= \underbrace{(|H\rangle \langle H| + |V\rangle \langle V|)}_{\Rightarrow \mathbb{1}} |Z\rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Damit ist ein Kriterium für Vollständigkeit eines Basissystems definiert⁷:

$$|H\rangle \langle H| + |V\rangle \langle V| = \mathbb{1} \quad (1.31)$$

1.6.4 VON-System, Rechenregeln

Wie wir festgestellt haben, sind $|H\rangle$ und $|L\rangle$ orthogonal zueinander und normiert (orthonormal), zudem erfüllen sie das Kriterium für Vollständigkeit. Damit bilden sie ein *vollständiges Orthonormal-System* (VON-System).

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(|Z\rangle)^\dagger = |Z\rangle^\dagger = \langle Z| \quad (1.32)$$

$$\langle Y|X\rangle^\dagger = \langle X|Y\rangle \quad (1.33)$$

1.6.5 Vom VON-System zum Hilbert-Raum

Gegeben sei ein Vektorraum und ein System $\{|a_i\rangle, i = 1, 2, \dots\}$, das ein VON-System sein soll, d.h.

$$\text{ON:} \quad \langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad (1.34)$$

$$\text{Vollst.:} \quad \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbb{1} \quad (1.35)$$

Dann läßt sich jeder Vektor $|b\rangle \in \text{VR}$ darstellen als $|b\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$ $c_i \in \mathbb{C}$ und es gilt:

$$\langle a_l | b \rangle = \sum_i c_i \langle a_l | a_i \rangle = \sum_i c_i \delta_{li} = c_l \quad (1.36)$$

c_i heißen die *Koordinaten*. Der Zustandsraum ist damit ein Vektorraum mit innerem Produkt (genauer: hermitesche Form), ein sog. *Hilbert-Raum*.⁸

⁷Anmerkung: $\langle | \rangle$ gibt als Ergebnis eine Zahl, $| \rangle \langle |$ ergibt eine Matrix.

⁸In späteren Abschnitten wird dieser Begriff wieder aufgegriffen und verallgemeinert.

1.6.6 Zum Meßvorgang im Hilbert-Raum

Ein beliebiger Zustand im Hilbert-Raum kann als Linearkombination der Basiselemente ausgedrückt werden. Durch eine Messung wird der Zustand auf ein Basiselement festgelegt:

$$|z_{\text{vor}}\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad (1.37)$$

$$|z_{\text{nach}}\rangle = |a_j\rangle \quad (1.38)$$

Die Wahrscheinlichkeit, den Zustand a_j als Meßergebnis zu erhalten, ist

$$W_{a_j} = |\langle a_j | z_{\text{vor}} \rangle|^2 \quad (1.39)$$

Beispiel: Vor der Messung ist

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|V\rangle$$

Bei der Messung mit einem horizontalen Polarisationsfilter ist die Wahrscheinlichkeit, ein horizontal polarisiertes Photon zu messen

$$|\langle H | R \rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Kapitel 2

Wechselwirkungsfreie Quantenmessung

Die klassische Physik lehrt uns, daß es bei (großen) System nicht möglich ist, etwas zu messen, ohne das System zu beeinflussen. Dies trifft scheinbar auch auf kleine Systeme zu, zumindest wird die Heisenbergsche Unschärferelation häufig so gedeutet. Nun wollen wir ein System betrachten, in dem es (zumindest theoretisch) möglich ist, nachzuweisen, ob ein Objekt im optischen Strahlengang zwischen zwei Spiegeln steht, *ohne* daß dieses Objekt von einem Photon getroffen wird.

2.1 Erste Überlegungen und Versuchsaufbau

Betrachten wir zunächst den in Abbildung 2.1 schematisch dargestellten Versuchsaufbau. Alle folgenden Überlegungen sind modellhaft und gehen von verlustfreien Spiegeln aus.

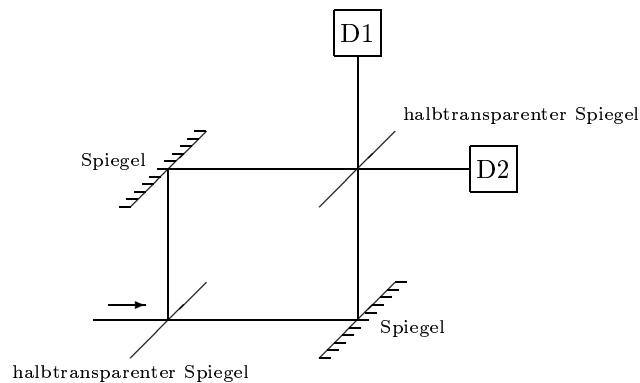


Abbildung 2.1: Versuchsaufbau zur wechselwirkungsfreien Quantenmessung

In die Apparatur wird ein Lichtstrahl geschickt, der sich am ersten halbdurchlässigen Spiegel (Strahlteiler) in zwei Strahlen mit jeweils halber Intensität aufspaltet, die dann über die beiden Umlenkspiegel auf den zweiten Strahlteiler treffen, wo sie sich wiederum aufspalten, so daß vier Teilstrahlen mit jeweils einem Viertel Intensität entstehen. Zwei davon treffen auf den Detektor D1 und zwei auf den Detektor D2.

Betrachtet man das Licht als *Welle*, würde aufgrund dieser Überlegungen jeder der Detektoren die halbe Intensität des Ursprungslichtstrahls messen. Tatsächlich zeigt sich aber im Experiment, daß der Detektor 1 dunkel bleibt, während der Detektor 2 mit halber Intensität beleuchtet wird. Dies liegt darin begründet, daß die Strahlteiler eine Phasenverschiebung von 90° und die Spiegel eine Verschiebung von 180° verursachen.¹

Beim Weg in den Detektor 1 passiert das Licht oben herum zwei Strahlteiler und einen Spiegel, hat also eine Phasenverschiebung von 360° ; unten herum passiert es nur einen Spiegel, dementsprechend die Phasenverschiebung von 180° . Der Gangunterschied von 180° bewirkt die gegenseitige Auslöschung, Detektor 1 bleibt dunkel. Beim Detektor 2 ergibt sich oben herum eine Phasenverschiebung von 180° (zwei Spiegel), unten herum ebenfalls, so daß die Teilstrahlen sich additiv überlagern und die theoretisch zu erwartende halbe Intensität ergeben.

Nimmt man nun an, Licht würde aus *Teilchen* bestehen, müßten beide Detektoren die halbe Intensität messen.

2.1.1 Abwandlung des Versuches

Wir wissen, daß Licht sowohl Welle als auch Teilchen ist; uns interessiert hier nur der Teilchencharakter. Dementsprechend schicken wir in den Meßaufbau nur einzelne Photonen, z.B. mit einem Puls laser. Weiterhin blockieren wir den oberen Strahlengang mit einem lichtundurchlässigen Gegenstand, wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

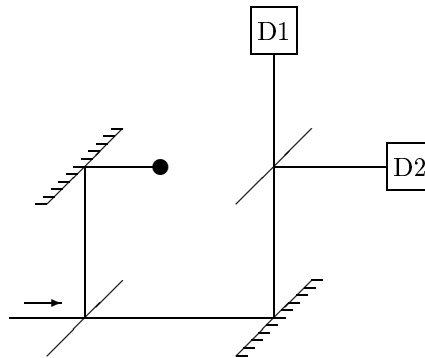


Abbildung 2.2: Abwandlung des Versuchsaufbaus

In beiden Licht-Modellen (Welle und Teilchen) ergibt sich nun eine Intensität von jeweils $1/4$ an beiden Detektoren.

Der Trick an diesem Versuch ist, daß man nun eine Aussage darüber treffen kann, ob im Strahlengang ein Objekt steht, wenn man in die Apparatur nur *ein einziges* Photon einbringt, welches dazu noch (theoretisch) den unteren Strahlengang durchläuft. Warum das geht, leiten wir im Folgenden her.

2.2 Erste mathematische Beschreibung

Wir möchten den Versuchsaufbau mit den Mitteln der Bracket-Schreibweise beschreiben. Dazu ist es zweckmäßig, den Versuchsaufbau in vier Gebiete aufzuteilen,

¹Die Begründung sollte in der Vorlesung Experimentalphysik II besprochen worden sein, sie findet sich aber auch in einschlägiger Fachliteratur.

Für den Übergang von Gebiet 3 in Gebiet 4 gelten die Überlegungen für Gebiet 1 nach Gebiet 2 analog und führen zu folgendem Zwischenergebnis:

$$|z_1\rangle = |h\rangle \quad (2.11)$$

$$|z_2\rangle = \gamma \quad [|h\rangle + i|v\rangle] \quad (2.12)$$

$$|z_3\rangle = -\gamma \quad [|v\rangle + i|h\rangle] \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} |z_4\rangle &= -\gamma^2 \{[|v\rangle + i|h\rangle] + i[|h\rangle + i|v\rangle]\} \\ &= -\gamma^2 2i|h\rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.1 Herleitung der Phasenverschiebung

In unseren bisherigen Überlegungen gingen wir davon aus, daß ein halbtransparenter Spiegel eine Phasenverschiebung von 90° verursacht. In diesem Abschnitt soll die mathematische Herleitung dieses Phänomens nachgeholt werden. Dabei verallgemeinern wir derart, daß wir auch halbtransparente Spiegel beschreiben können, die die Intensitäten des einfallenden Lichtes nicht in zwei gleiche Teilintensitäten zerlegen.

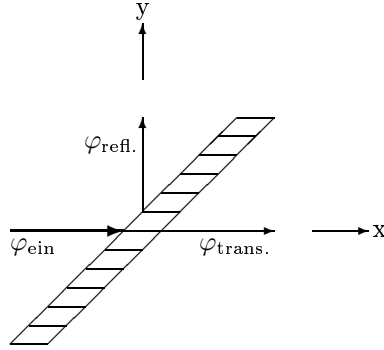


Abbildung 2.4: Skizze eines halbtransparenten Spiegels

Betrachten wir einen teildurchlässigen Spiegel gemäß Abbildung 2.4, der unendlich dünn ist, denn dann spielt die Dicke des Spiegels im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes keine Rolle und wir können daraus resultierende Phänomene vernachlässigen. Der Spiegel habe einen Transmissionsgrad α und einen Reflexionsgrad β , dann gilt $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (die Intensitäten der Teilwellen addieren sich, die einfallende Intensität wird zu 1 normiert). Das System läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\text{einfallende Welle} \quad e^{ikx} \quad (2.15)$$

$$\text{transmittierte Welle} \quad \alpha e^{i\tau} e^{ikx} \quad (2.16)$$

$$\text{reflektierte Welle} \quad \beta e^{i\rho} e^{iky} \quad (2.17)$$

α und β sind vorgegeben, τ und ρ gesucht. Mit unseren Annahmen gilt

$$\underbrace{e^{ikx}}_{\text{einfallend}} + \underbrace{\beta e^{i\rho} e^{iky}}_{\text{reflektiert}} = \underbrace{\alpha e^{i\tau} e^{ikx}}_{\text{transmittiert}} \quad (2.18)$$

Wir können o.B.d.A. $x = y$ setzen.

$$1 + \beta e^{i\rho} = \alpha e^{i\tau} \quad (2.19)$$

Durch quadratische Ergänzung kann man auf zwei Wegen vereinfachen:

$$\begin{array}{ll}
 1 + \beta e^{i\rho} = \alpha e^{i\tau} & 1 + \beta e^{i\rho} = \alpha e^{i\tau} \\
 (1 + \beta e^{i\rho})(1 + \beta e^{-i\rho}) = \alpha^2 & 1 - \alpha e^{i\tau} = -\beta e^{i\rho} \\
 1 + \beta e^{i\rho} + \beta e^{-i\rho} + \beta^2 = 1 - \beta^2 & (1 - \alpha e^{i\tau})(1 - \alpha e^{-i\tau}) = \beta^2 \\
 2\beta^2 + 2\beta \cos \rho = 0 & 1 - \alpha e^{i\tau} - \alpha e^{-i\tau} + \alpha^2 = 1 - \alpha^2 \\
 2\beta \cos \rho = -2\beta^2 & 2\alpha \cos \tau = 2\alpha^2 \\
 \cos \rho = -\beta & \cos \tau = \alpha
 \end{array}$$

Da nach Voraussetzung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, folgt

$$\cos^2 \tau + \cos^2 \rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \rho = \sin^2 \tau \quad \Rightarrow \quad \rho = \tau + \frac{\pi}{2} \quad (2.20)$$

und es ist

$$e^{i\tau} = \cos \tau + i \sin \tau = \alpha + i\beta \quad (2.21)$$

$$e^{i\rho} = i(\alpha + i\beta) \quad (2.22)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (2.16) und (2.17) umstellen zu

$$\text{transmittierte Welle} \quad \alpha e^{i\tau} e^{ikx} = \alpha(\alpha + i\beta) e^{ikx} \quad (2.23)$$

$$\text{reflektierte Welle} \quad \beta e^{i\rho} e^{iky} = i\beta(\alpha + i\beta) e^{iky} \quad (2.24)$$

2.3 Mathematische Verallgemeinerung

Wir wollen die bisher erkannten Erkenntnisse nun zu einer vollständigen mathematischen Beschreibung des Versuchsaufbaus zusammensetzen. Die Aufteilung in vier Gebiete behalten wir zunächst bei.

2.3.1 Der Einfluß von Strahlteilern

An einem Strahlteiler gilt allgemein

$$|z_{\text{nach}}\rangle = \mathbb{M} |z_{\text{vor}}\rangle \quad (2.25)$$

wobei $\mathbb{M}$ eine beliebige, in Folgenden weiter spezifizierte Matrix darstellt. Ist z.B.

$$|z_{\text{vor}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

dann ist

$$|z_{\text{nach}}\rangle = \begin{pmatrix} z_{1 \text{ nach}} \\ z_{2 \text{ nach}} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(\alpha + i\beta) \\ i\beta(\alpha + i\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Amplitude von } e^{ikx} \\ \text{Amplitude von } e^{iky} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$= (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha \\ i\beta \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Wie sieht nun $\mathbb{M}$ aus?

$$(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha \\ i\beta \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta)\alpha & b \\ (\alpha + i\beta)\beta & d \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

b und d kann man bestimmen über die Wahl der einlaufenden Welle als e^{iky}

$$\dots \Rightarrow \mathbb{M} = (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Wir haben somit eine Matrix gefunden, die uns den Einfluß jedes beliebigen Strahlteilers auf eine einfallende Lichtwelle beschreibt:

$$|z_{\text{nach}}\rangle = (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} |z_{\text{vor}}\rangle \quad (2.33)$$

Auch Spiegel lassen sich damit beschreiben. Für sie gilt anschaulich $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ und somit

$$|z_{\text{nach}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} |z_{\text{vor}}\rangle \quad (2.34)$$

2.3.2 Spezielle Eigenschaften der Matrix

Welche Eigenschaften muß $\mathbb{M}$ haben?

Ausgehend von der Annahme, daß $\langle z_{\text{nach}} | z_{\text{nach}} \rangle = 1$ und $\langle z_{\text{vor}} | z_{\text{vor}} \rangle = 1$ – die Ereignisse haben die gleiche Länge, es geht im System nichts verloren – können wir ableiten:

$$\text{Mit } |z_n\rangle = \mathbb{M}|z_v\rangle \text{ und } \langle z_n| = \langle z_v|\mathbb{M}^\dagger \text{ ist} \quad (2.35)$$

$$\langle z_n | z_n \rangle = \langle z_v | \mathbb{M}^\dagger \mathbb{M} | z_v \rangle = \langle z_v | z_v \rangle \quad (2.36)$$

$$\text{und es folgt } \mathbb{M}^\dagger \mathbb{M} = 1 \text{ bzw. } \mathbb{M}^\dagger = \mathbb{M}^{-1} \quad (2.37)$$

Matrizen, die die Eigenschaft $\mathbb{M}^\dagger = \mathbb{M}^{-1}$ haben (die Adjungierte der Matrix ist gleich der Inversen der Matrix), nennt man *unitär*². Unitäre Matrizen sind normerhaltend³.

2.3.3 Die allgemeine Beschreibung

Nun haben wir das Handwerkszeug, um das Spiegel-Strahlteiler-System mathematisch zu beschreiben. In dem Aufbau nach Abbildung 2.1 soll der untere halbtransparente Spiegel die Transmissionskoeffizienten α und β haben, der obere entsprechend α' und β' , die nicht zwangsläufig gleich sein müssen.

Ein Lichtstrahl mit dem Zustand $|z_1\rangle$ durchläuft in unserem System nacheinander die Gebietsgrenzen von 1 nach 2, von 2 nach 3 und von 3 nach 4. Die dabei auftretenden Zustandsänderungen können wir nun mithilfe der speziellen Matrizen $\mathbb{M}$ beschreiben. Jeder Wechsel des Gebietes entspricht dabei mathematisch dem Von-Links-Multiplizieren, das aus der Linearen Algebra bekannt sein dürfte:

$$|z_4\rangle = \overbrace{(\alpha' + i\beta') \begin{pmatrix} \alpha' & i\beta' \\ i\beta' & \alpha' \end{pmatrix}}^{3 \rightarrow 4} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{2 \rightarrow 3} \overbrace{(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix}}^{1 \rightarrow 2} |z_1\rangle \quad (2.38)$$

$$= -(\alpha' + i\beta')(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha' & i\beta' \\ i\beta' & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$= -(\alpha' + i\beta')(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} i\alpha'\beta + i\beta'\alpha & \alpha'\alpha + \beta'\beta \\ \alpha'\alpha + \beta'\beta & i\alpha'\beta + i\alpha\beta' \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.40)$$

Gleichung (2.40) beschreibt das gesamte System in allgemeiner Formulierung. Nun wissen wir aber, daß der Detektor 1 dunkel bleibt, während der Detektor 2 beleuchtet wird, vgl. 2.1 auf Seite 12.

²Diese Definition wird in späteren Kapiteln verallgemeinert.

³Die Norm eines Vektors beschreibt seine Länge. Bei uns ist demnach $\langle z | z \rangle$ eine Norm.

2.3.4 Eine spezielle Vereinfachung

Wie kann man diesen experimentellen Befund nun hiermit beschreiben? Wähle $\alpha' = \beta$ und $\beta' = \alpha$, dann vereinfacht sich Gleichung (2.40) zu:

$$|z_4\rangle = -(\beta + i\alpha)(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} i\beta^2 + i\alpha^2 & \beta\alpha - \alpha\beta \\ \beta\alpha - \alpha\beta & i\beta^2 + i\alpha^2 \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.41)$$

$$= -i(\beta + i\alpha)(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.42)$$

$$= |z_1\rangle \quad (2.43)$$

Tatsächlich sind wir bei unseren eingänglichen Betrachtungen davon ausgegangen, daß die Strahlteiler sich ideal verhalten, d.h. daß sie die Strahlen gleich aufteilen. Die spezielle Wahl von α' und β' läßt sich durch geeignete Wahl der Spiegel realisieren. Betrachte folgende Spezialfälle:

1. $\beta = 0, \alpha = 1$: In diesem Fall wird nur e^{ikx} transmittiert, reflektiert wird gar nichts; nur Detektor 1 spricht an.
2. $\beta = 1, \alpha = 0$: In diesem Fall wird nicht transmittiert, reflektiert wird $-e^{iky} = ie^{iky}$. Das reflektierte Licht erfährt demnach einen Phasensprung um π .⁴
3. halbtransparenter Spiegel $\beta = \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Das transmittierte Licht wird beschrieben durch $\frac{1+i}{2}e^{ikx}$, das reflektierte durch $\frac{-1+i}{2}e^{iky}$.

2.4 Hin zur wechselwirkungsfreien Quantenmessung

Blockiert man nun den oberen Strahlengang, drückt sich das in unserem mathematischen Gefüge dadurch aus, daß in Gleichung (2.38) die Matrix der beiden Spiegel von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verändert.

Wir verwenden wieder geeignete Spiegel, so daß $\alpha' = \beta$ und $\beta' = \alpha$. Dann ist

$$|z_4\rangle = -(\alpha' + i\beta')(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha\beta' & i\beta\beta' \\ -i\alpha\alpha' & \alpha'\beta \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.44)$$

$$= -(i\alpha' + \beta')(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha\beta' & i\beta\beta' \\ -i\alpha\alpha' & \alpha'\beta \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.45)$$

$$= -(i\beta - \alpha)(\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} \alpha\alpha & i\alpha\beta \\ -i\alpha\beta & \beta\beta \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.46)$$

$$= \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{=1} \begin{pmatrix} \alpha^2 & i\alpha\beta \\ -i\alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} |z_1\rangle \quad (2.47)$$

Wir schicken wieder horizontal polarisiertes Licht in den Aufbau, d.h. $|z_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ergibt sich

$$|z_4\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -i\alpha\beta \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Resümee

(Wir schwenken auf die Zielgerade ein :-)

Wie kann man nun wechselwirkungsfrei messen? Betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 , mit denen die Detektoren 1 und 2 ansprechen, wenn ein Photon in das System eingebracht wird. Steht im Strahlengang

⁴denn $e^{i\pi} = 1$

- kein Streuer, so wird der Detektor 1 dunkel bleiben, d.h.

$$p_1 = 0 \quad \text{und} \quad p_2 = 1 \quad (2.49)$$

- ein Streuer, so ist

$$p_1 = |\alpha^2|^2 = \alpha^4 \quad \text{und} \quad p_2 = |-i\alpha\beta|^2 = \alpha^2\beta^2 \quad (2.50)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein einfallendes Photon gestreut wird, ergibt sich dann zu

$$p_{\text{streu}} = 1 - p_1 - p_2 = 1 - \alpha^4 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) = 1 - \alpha^2 \quad (2.51)$$

Beispiele

1. $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}, p_{\text{streu}} = \frac{1}{2}$
2. $\alpha \rightarrow 1 \Rightarrow p_1 \rightarrow 1, p_2 \rightarrow 0, p_{\text{streu}} \rightarrow 0$

Bringt man nun ein einzelnes Photon in das System ein und sieht, daß Detektor 1 anspricht, so kann man mit Sicherheit sagen, daß ein Objekt im oberen Strahlengang steht, ohne es mit einem Photon beschossen zu haben, d.h. man kann (zumindest theoretisch) wechselwirkungsfrei messen⁵.

⁵Tusch, aufbrausender Beifall, Frauen fallen in Ohnmacht