Einführung in die Didaktik der Mathematik

Vorlesung von Frau Prof. Dr. K. Reiss
gehalten im Sommersemester 2002

Endgültige Überarbeitung der
Vorlesungsmitschrift von Lars Hoegen
[Homer.Simpson@atomkraftwerk-springfield.de]

Letzte Änderung: 7. Februar 2003

Vorwort

Da ich in der Vorlesung aufgrund des Arbeitstempos der Referentin nicht in der Lage war, eine Reinschrift zu führen, habe ich mich dazu durchgerungen, die Mitschriften aus der Vorlesung zu sichten und in dieser Form zu setzen. Die vorliegende Beratbeitung ist die endgültige, d.h. ich gedenke ggf. nur noch Korrekturen der Orthographie vorzunehmen. In der Hinsicht auf zukünftige Projekte bin ich aber auch weiterhin für Anmerkungen dankbar.

Dieses Dokument enthält alle meiner Meinung nach wesentlichen Punkte der Vorlesung von Frau Prof. Dr. Reiss, wie sie sie im Sommersemester 2002 gehalten hat. Mittlerweile ist auch der Inhalt der ersten Sitzung eingearbeitet, basierend auf den Mitschriften von Kristin Blume. Ihr gebührt mein Dank für die Mitwirkung.

Im Laufe der Prüfungsvorbereitung stieß ich auf díe Mitschrift der Vorlesung von Herrn Prof. Sprockhoff im Sommersemeter 1999[1], die für mich eine sinnvolle inhaltliche Ergänzung zu dieser Mitschrift darstellt.

Die nachfolgende Mitschrift erhebt Anspruch auf Unvollständigkeit. `<Ironie>` Rechtschreipfähler sind beabsichtigt und dienen der Erheiterung der Leserinnen und Leser. Ebenso ist die konsequente Verwendung der maskulinen Genus Ausdruck puren Sexismus. `</Ironie>`

Februar 2003
Lars Hoegen

[1] http://www.mathematik.uni-oldenburg.de/personen/hartmann.new/einfuehrung.html

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Ziele des Mathematikunterrichts

1.1 Erste Perspektive

Bei der ersten Betrachtung von Mathematikunterricht kann mann einige allgemeine Bildungsziele ableiten: (vgl. [1]):

- Lebensvorbereitung;
- Stiftung kultureller Kohärenz;
- Weltorientierung;
- Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch;
- Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft;
- Einübung von Verständigung;
- Kooperation und die Stärkung des Schüler-Ichs.

1.2 Zweite Perspektive

Bei genauerer Betrachtung ist auch noch eine zweite Differenzierung in fächerspezifische Ziele des Mathematikunterrichts denkbar (vgl. [2]).

1.2.1 Fächerübergreifende Ziele

Fundamentale kognitive Fähigkeiten

Als fundamentale kognitive Fähigkeiten bezeichnet man zum Beipiel:

- Anschauungsvermögen;
- Logisches Denken;
- Kommunikations- und Kooperationsfähigkeit;
- Sprachförderung und Kritikfähigkeit;
- Förderung von Problemlöseverhalten und Kreativität;
- Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit.

Kognitive Grundtechniken

Kognitive Grundtechniken werden im wesentlichen im Lernprozess erworben. Dazu zählen zum Beispiel:

- Vergleichen;
- Ordnen;
- Abstrahieren;
- Verallgemeinern;
- Klassifizieren;
- Konkretisieren bzw. Spezialisieren;
- Formalisieren;
- Analogisieren.

Allgemeine Arbeitstechniken

Allgemeine Arbeitstechniken können als übergeordnete Strukturen universell angewandt werden:

- Sauberes Konstruieren in der Geometrie;
- Sorgfältiges Erstellen von Graphiken;
- Genaues Rechnen;
- Übersichtliches und vollständiges Notieren von Rechnungswegen, Konstruktionsbeschreibungen, Aufgabenlösungen.

1.2.2 Fachgebundene Ziele

Inhaltsbezogene mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten

Hier finden sich abstraktere Begriffe wieder, wie z.B.:

- Beherrschung sogenannter Kulturtechniken;
- Verständnis des Algorithmisieren;
- Fähigkeit zur Mathematisierung von Umweltsituationen;
- Fähigkeit, Mathematik in der Umwelt zu verstehen.

Fachbezogene Einsichten und Einstellungen

Diese Ziele sind sehr schwierig zu verwirklichen:

- Möglichkeiten und Grenzen der Mathematik sehen;
- Freude an der strukturellen Seite der Mathematik;
- Freude an der ästhetischen und spielerischen Seite der Mathematik.

Kapitel 2

Inhalte des Mathematikunterrichts

2.1 Kernbereiche

Zu den Kernbereichen des Mathematikunterrichts gehören:

- Zahlen;
- Grössen;
  Geld, Raummaße, Gewichte etc.
- Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme;
  Terme, Umfomungen
- Funktionen;
- Geometrie;
- Stochastik;
- Lineare Algebra und Analytische Geometrie;
- Analysis.

Die ersten sechs Bereiche sind eher unabhängig von der Jahrgangsstufe, die letzten beiden Bereiche kommen meist in der Sekundarstufe II vor.

2.2 Auswahl, Anordnung, Strukturierung

Bei der Auswahl, Anordnung und Strukturierung von Inhalten muss beachtet werden:

Wissenschaft des Mathematikunterrichts Hiermit ist nicht die Übertragung der mathematischen Wissenschaftlichkeit in den Unterricht gemeint, sondern eher der Versuch, den Schülern das *Rechnen* als Wissenschaft verständlich zu machen.

Orientierung an *fundamentalen Ideen* Schweiger [3] bezeichnet eine fundamentale Idee als *„Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken, die es erlauben, Mathematik im historischen Kontext zu verstehen oder daran einen Lehrplan zu erstellen“*. Einige Beispiele:

- Funktionale Varianten;
  funktionales Denken, Termumformungen, Variablenbegriff, Stetigkeit
- Induktion;
  experimentelle Mathematik
- Approximation;
  Messen, Schätzen, Überschlagen
- Algorithmisierung.
  Vergegenständlichung von Rechenverfahren

Allgemeinbildungskonzept Nach Heymann [1] sind folgende Punkte für ein *verständnisorientiertes Arbeiten* wichtig:

- Idee der Zahl;
- Idee des Messens;
- Idee des funktionalen Zusammenhangs;
- Idee des räumlichen Strukturierens;
- Idee des Algorithmus;
  Frage: Woher kommt die Berechnungsvorschrift?
- Idee des Modellierens.
  Für eine Planung ist eine Vorstellung der zu planenden Situation nötig.

2.3 Grundlagen der didaktischen Analyse

Die o.g. Aspekte und Kernbereiche dienen als Grundlage der didaktischen Analyse. Anhand dieser lassen sich Fragen beantworten, wie z.B.

1. Welches sind die Voraussetzungen und die notwendigen Vorkenntnisse für die Behandlung des Themas?
2. Wie ist die Struktur des Stoffes? (Stoffelemente, Schwerpunkte?)
3. Welches ist der übergreifende Stoffzusammenhang?
4. Für welchen Begriff, welche Methode, welches Verfahren, welches Prinzip ist der Stoff exemplarisch?
5. Welche Anwendungs- und Transfermöglichkeiten gibt es (fachintern und fächerübergreifend)?
6. Welche Beziehungen bestehen zu faschspezifischen und fächerübergreifenden Linienführungen und welche fachtypischen Denk- und Arbeitsweisen werden mit dem Stoff entwickelt?
7. Welche Beispiele können zur Motivation und Behandlung des Stoffes aus der Struktur und dem Anwendungsbereich abgeleitet werden?

8. Welche Möglichkeiten (und Notwendigkeiten) einer Konzentration auf Wesentliches und Grundlegendes im Stoff sind gegeben?

9. Wie ordnet sich der Stoff in langfristige inhaltliche Konzepte mathematischer Allgemeinbildung ein?

10. Welche Bedeutung hat der Stoff für die „Lebensvorbereitung, Weltorientierung, Stärkung des Schüler-Ichs, kulturelle Kohärenz, Herausbildung von Kreativität“?

11. Aus der Beschreibung der Grunglagen eines möglichen Ziel-Inhalts-Konzeptes ergeben sich Fragen nach den didaktischen und psychologischen Grundlagen des Mathematik-Lehrens und -Lernens als Basis von Unterrichtskonzepten.

Kapitel 3

Aspekte der kognitiven Entwicklung

Zunächst ein Beispiel: Man kann ein bis drei Elemente, z.B. Punkte in einem Rechteck, direkt durch Hinschauen als ein bis drei Elemente erkennen. Bei mehr als drei Elementen muss selbst ein Erwachsener nachzählen. Man kann nachweisen, dass die zuerst beschriebene Fähigkeit bereits im Säuglingsalter zu beobachten ist.
Für die mathematische Didatik ist es von essentieller Bedeutung, diese Lernmechanismen und Entwicklungsstufen zu verstehen.

3.1 Stadien der Entwicklung nach Piaget

Piaget entwickelte eine der ersten Theorien zur Entwicklung von Kindern und Jugendlichen, nach der diese drei Stadien duchlaufen. Er nennt für jedes typische Handlungen, typische Schritte und eine Altersspanne, die als Richtschnur dient. Er führt dabei den Begriff der sog. *Operation* ein, der über die blosse Handlung hinausgeht und den gesamten Lernprozess umfasst und beschreibt.

Das sensomotorische Stadium Im Baby-Alter bilden Reiz und Reaktion eine unreflektierte, unmittelbare Einheit.

Das präoperative Stadium oder das Stadium des anschaulichen Denkens
Im Alter von 2 bis 6 Jahren ist das Verhalten eines Kindes an konkrete Handlungen und unmittelbare Anschauung gebunden; Handlungen sind nicht kompositionsfähig und nicht reversibel.
Ein Kind in diesem Stadium lernt in erster Linie durch Anschauung und betreibt „Learning-by-Doing“. Darauf ist die gesamte Wahrnehmung gerichtet. Das Kind ist weder in der Lage, eine Handlung aus mehreren Einzelschritten zusammenzusetzen, noch diese wieder rückgängig zu machen.

Das Stadium der konkreten Operation Im Alter von 7 bis 11 Jahren sind alle Handlungen eines Kindes an bestimmte Vorstellungen gebunden; sie sind kompositionsfähig und reversibel, besitzen Assoziativität und wissen von der Existenz identischer Operatoren.
Operationen hängen von gleichzeitiger oder kurz vorhergehender Erfahrung ab. Dennoch ist es dem Kind möglich, mit verbalen Darstellungen von Objekten umzugehen, wenn konkrete Erfahrungen vorausgegangen sind (Assozativität) . Das Kind ist nur in sehr begrenztem Maße zu abstraktem Denken in der Lage. Dafür kann

es komplexe Handlungen aus mehreren Teilhandlungen zusammenfügen (Kompositionsfähigkeit) und ist in der Lage, Handlungen rückgängig (reversibel) zu machen, z.B. $8 + 5 = 13 \Rightarrow 13 - 5 = 8$.
Des weiteren erkennt das Kind die Existenz identischer Operatoren, also von Handlungen, die zu keinem Ergebnis führen.

Das Stadium der formalen Operation Ab etwa dem 12. Lebensjahr sind die Handlungen von Kindern und Jugendlichen nicht mehr an konkrete Handlungen gebunden, sondern sind eher formal-abstrakt, deduktiv, und hypothetisch.
Das Denken definiert sich in diesem Stadium aufgrund von Annahmen, die mit der Realität in keiner notwendigen Beziehung stehen (formal-abstrakt und hypothetisch) und ist motiviert durch die Einsicht in die Notwendigkeit einer Schlussfolgerung (deduktiv).

3.2 Äquilibrationstheorie nach Piaget

Piaget hat noch eine weitere wichtige Theorie formuliert, die besagt:

> „Die Beziehung zwischen Umwelt und Individuum wird von beiden Seiten geformt. Das Individuum hat das Ziel, bestehende Spannungsgefälle abzubauen.
> Ziel: Gleichwertigkeit zwischen der Welt und dem Bild, das sich das Individuum von ihr macht.“

3.3 Aeblis operative Methode

Der Schweizer Verhaltensforscher Aebli formuliert folgende These:

> „Das Denken des Menschen ist ein Spiel lebendiger Operationen. Denken heisst operieren.“

Nach Aebli sind es Operationen, die Begriffe definieren. Daher muss der Unterricht den Schüler dazu bringen, diese Operationen zu vollziehen, zuerst tatsächlich, dann in verinnerlichter oder stellvertretender Form.
Er nennt dabei am Beispiel der Achsenspiegelung die drei Stufen der Verinnerlichung von Operationen:

1. Konkrete Stufe
   Hantieren mit einem Taschenspiegel;

2. Figurale Stufe
   Ausführen der Operation durch Zeichnen;

3. Symbolische Stufe
   Angabe der Abbildungsvorschrift.

An diesen drei Stufen sollten sich didaktische Methoden der Mathematik orientieren, wobei der konkreten Stufe elementare Bedeutung zukommt. Es ist allerdings schwierig, in der weiterführenden Mathematik der oberen Sek I und der Sek II „greifbare“ Beispiele zu finden; man sollte sich auf jeden Fall an einfache Modelle halten, die dann vertieft werden.

3.4 Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

Nach Bruner vollzieht sich die Denkentwicklung *gleichzeitig* auf verschiedenen Ebenen, die in einer starken *Wechselwirkung* zueinander stehen. Er unterscheidet drei Darstellungsebenen:

enaktive Darstellung: Das Erfassen von Sachverhalten durch eigene Handlungen (mit konkretem Material). Man lernt durch das eigene Handeln.

ikonische Darstellung: Erfassung von Sachverhalten durch Bilder oder Graphiken.

symbolische Darstellung: Erfassen von Sachverhalten durch verbale Mitteilungen oder Zeichen.

Die Stufen sind *nicht* altersabhängig, es gibt aber altersabhängige Akzentverschiebungen. Die Denkentwicklung ist als verbesserte Koordination zwischen den Ebenen zu betrachten.

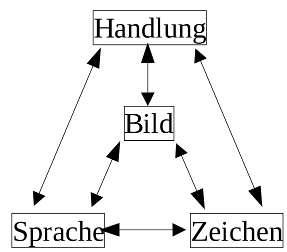

Abbildung 3.1: Zur Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

Kapitel 4

Konstruktivismus und Kognitivismus in der Didaktik

4.1 Konstruktivismus und Kognitivismus

Im Zusammenhang mit den Theorien von Aebli und Bruner sind zwei Begriffe von Bedeutung, die „puristische“ Positionen zum Lehren und Lernen verkörpern.

Kognitivismus Der Kognitivismus besagt, dass der Schüler den Stoff nur durch geistige Auseinandersetzung mit entsprechenden Theorien lernt. Merkmal dieser Art zu Lernen ist die beständige Wiederholung des zu lernenden Stoffes.

Konstruktivismus Der Konstruktivismus vertritt die Meinung, dass der Lernende den Inhalt konstruktiv erwirkt, d.h. durch eigenständige Erfahrung lernt.
Da sich diese beiden Thesen quasi diametral gegenüberstehen, versucht man in der heutigen Mathematikdidaktik, einen Mittelweg einzuschlagen und vertritt dabei den wissensbasierten Konstruktivismus (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001 in Widemann & Krapp).

4.2 Merkmale eines Wissensbasierten Konstruktivismus

Es ist notwendig, dass Lernen unter folgenden Gesichtspunkten stattfindet, die alle gleichrangig zu behandeln sind:

- situiert und anhand authentischer Probleme
  Authentisch bedeutet dabei nicht unbedingt sachbezogen, Probleme sollten eher „echt“ und situationsbezogen sein.

- in multiplen Kontexten
  Abwechslung ist wichtig, daher sollte man die Lernsituationen systematisch verändern, um verschiedene (Lern-)Kontexte zu schaffen, wobei man sich durchaus über alle Lernebenen nach Aebli oder Bruner bewegen sollte.

- unter multiplen Perspektiven
  Man sollte ein Problem von verschiedenen Seiten beleuchten und die Schüler dazu ermutigen, eingenständige Problembehandlung zu betreiben, bei der mehrere verschiedene Lösungen den Lernprozess fördern.

- in einem sozialen Kontext
  Zwischen den Schülern sollte ein Austausch über die Lernergebnisse stattfinden, denn gegenseitige Erklärung fördert das Lernen.

- mit instruktiver Unterstützung
  Der Schüler denkt, der Lehrer lenkt ;-)

4.3 Didaktische Prinzipien

Aus den o.g. Merkmalen lassen sich gewisse Prinzipen ableiten, die nach Winter [4] gedacht sind als *„allgemeine, regelhafte Handlungsanweisungen für den Unterricht“*. Diese dienen dazu, die Komplexität des Unterrichts zu reduzieren und bieten eine theoretische Orientierung. Ziel ist es, ein Konstrukt im Kopf zu haben, aus dem heraus man den konkreten Unterricht entwickelt.
Für solche Prinzipien gibt es verschiedene Beispiele:

4.3.1 Das operative Prinzip

In der Primarstufe trägt dieses Prinzip auf der Grundlage, dass das menschliche Handeln ein Spiel lebendiger Operationen sei (vgl. Aebli), im Wesentlichen das Konzept von Untericht:

- Denken und Lernen braucht Anlässe in Form von Problemen;

- Denken und Lernen hat ein konkretes Ergebnis (das auf Situationen und konkrete Handlungen angewendet werden kann);

- konkrete Handlungen und Wahrnehmungen werden schrittweise verinnerlicht;

- Handlungen müssen gedanklich nachvollzogen werden, um die Abstraktion von Wissen zu erreichen;

- begriffliche Mittel des Lernenden berücksichtigen;

- Operationen sind beweglich, müssen unter verschiedenen Aspekten bearbeitet werden;

- Einsicht in die Zusammenhänge von Begriffen und Operationen vermitteln (wobei es nicht darauf ankommt, Begrifflichkeiten zu lernen, sondern die Anwendung zu verinnerlichen).

Daraus ergeben sich drei Folgerungen:

1. Der Lerninhalt muss in seiner Gesamtheit behandelt werden.

2. Ein Lerninhalt muss operativ durchgearbeitet werden.

3. Ein Lerninhalt sollte nicht präsentiert werden, sondern muss heuristisch- entdeckend erarbeitet werden.

Die Rolle der Sprache ist dabei wesentlich für das mathematische Verständnis. Nur wer in der Lage ist, Texte gut zu verstehen oder sich zu erarbeiten, kann sich Mathematik aneignen.

4.3.2 Das Prinzip der Darstellungsformen

...sei hier am Rande erwähnt. Es stützt sich auf Bruners Erkenntnisse und besagt, das die drei Ebenen

Enaktiv
Ikonisch
Symbolisch

im Zuge des Lernens angesprochen werden, wobei man sich nicht streng an diese Abfolge halten muss, sondern durchaus mehrmals wechseln kann.

4.3.3 Das Spiralprinzip

...ist auch nur von geringer Bedeutung. Nach diesem Prinzip wird ein Lerngegenstand im Laufe der Schulzeit immer wieder auf verschiedenen Niveaus präsentiert, woraus sich die Vorteile der Altersgemässheit, der Vernetzung von Wissen und des stimmigen Bildes von Mathematik ergeben.

4.3.4 Das genetische Prinzip

Das genetische Prinzip spielt für die Sekundarstufe die Rolle, die das operative Prinzip für die Primarstufe spielt. Es besagt:
Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heisst *genetisch*, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.
Folgende Merkmale sind dafür charakteristisch:

- Anschluss an das Verständnis der Adressaten (man darf auf einem Basiswissen aufbauen);
- Einbettung der Überlegungen in grössere und ganzheitliche Problemkontexte ausserhalb oder innerhalb der Mathematik;
- Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus (dabei sollte die Begriffsdefinition auf ihre Tragfähigkeit hin geprüft werden);
- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Aspekte;
- durchgehende Motivation und Kontinuität;
- allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und Variation des Standpunktes.

Das genetische Prinzip - Teil 2[1]

Schlagworte (vgl. [2], [5]):

- Schüler teilhaben lassen am spannenden Suchen (Otto Toeplitz, 1926);
- Wiederentdecken unter Führung (Freudenthal);
- Mathematik als Mathematik-Machen (Wagenstein);
- weg vom Fertigprodukt Mathematik (Wittenberg,1963).

[1] In Vertretung von Frau Prof. Dr. Reiss hat Herr Hon. Prof. Dr. Steinberg eine Vorlesung übernommen, in der er das didaktische Prinzip vertiefend erläuterte.

> *„Mathematik (im Verständnis des Lernenden) so erschliessen und erfahren lassen, wie sie hätte entstanden sein können!" (A.I. Wittenberg)*

Das genetische Prinzip kann man differentieren in deduktive und induktive Methode. Die deduktive Methode soll hier nicht weiter betrachtet werden, sie wird z.B. im Skriptum zur Vorlesung von Prof. Dr. Henning behandelt. Die induktive Methode ist gekennzeichnet durch:

Prozessorientiertheit Mathematik sollte nicht als Fertigprodukt zur Kenntnis genommen, sondern wiederentdeckt werden. Das elegante Fertigprodukt steht nicht am Anfang, sondern ist eine Spätform der Entwicklung der Mathematik.

Orientierung an der Situation der Lernenden Vorkenntnisse, Erfahrungen, Interessen der Lernenden feststellen, um einen geeigneten Ansatzpunkt (eine Fragestellung) zu finden.

Problemorientierung – Entdecken des Lernens – Anwendungsorientiertheit Ein nach Punkt 2 adäquates Problem so stellen, dass die Schüler die grundlegenden neuen Operationen (Begriffe und Verfahren) durch eigenes Suchen und Forschen selbst entdecken können (so werden besseres Verständnis, sicheres Beherrschen und Behalten Können gefördert). Die Problemstellungen können zwar auch innermathematisch sein, sollten sich aber vornehmlich an Anwendungsbeispielen orientieren (Motivationsaspekt).

Vorläufige Definition und Formulierung Formal exakte oder vollständige Definitionen werden (zunächst) ausser acht gelassen. An ihre Stelle treten (zunächst) sinnvolle Umschreibungen, intuitives Erfassen von Zusammenhängen, eingebunden in Problemsituationen.

Transfer auf ähnliche Probleme und Abstraktion Die betreffenden Problemsituationen sollen zu denselben abstrakt-mathematischen Begriffen oder Verfahren gehören. Dabei erfolgt eine zunehmende Abstraktion und Präzisierung.

Beispiele zum genetischen Prinzip

1. Von Teilern zu Primzahlen
   Man erzähle Schülern in der Jahrgangsstufe 4 oder 5 folgende Geschichte:

   > Die 1 kommt heulend zur 0 und beschwert sich, dass nur Zahlen mit vielen Teilern etwas wert seien und das sie nur einen (sich selbst) habe. Daraufhin wird sie von der 48 ausgelacht, die ja 10 Teiler hat ($1 \cdot 48$, $2 \cdot 24$, $3 \cdot 16$, $4 \cdot 12$, $6 \cdot 48$). Da schliessen sich die 2, die 3, die 5, die 7 und die 13 dem Klagen der 1 an. Die 25 meint, diese sollten froh sein, da sie ja bereits zwei Teiler hätten. Die 169 gibt zu denken, dass sie ja viel grösser als die 48 sei und wie die 25 trotzdem nur drei Teiler besitze. Die 0 orakelt nun, dass die Zahlen mit nur zwei Teilern etwas ganz besonderes seien.

   Dieses Beispiel verwendet zunächst einmal eine für die Kinder in dem Alter ansprechende, märchenhafte Sprache mit personifizierten Zahlen. Dabei ist der Sachverhalt wertfrei, da innermathematisch (*reale* Zahlen könnten so mit einer Wertvorstellung behaftet werden). Trotzdem lassen sich daran wichtige Grundlagen entwickeln, namentlich der Begriff Teiler und der Begriff Primzahl. Weiterhin kann festgestellt werden, dass Quadratzahlen (neuer Begriff) offenbar immer nur drei Teiler haben. Den Kindern werden so quasi spielerisch diese Zusammenhänge vermittelt.

2. Quadrat
   Schülern der Klasse 6 lasse man die Gemeinsamkeiten von verschiedenen quadratischen Dingen/Formen (Teppichfliese, Pappschachtel u.ä.) formulieren, um darüber den Begriff „Quadrat“ zu definieren. Sie werden etwa zu dem Schluss kommen, ein Quadrat sei ein Viereck mit gleichlangen Seiten und vier rechten Winkeln. Diese Aussage ist streng mathematisch überdefiniert und muss nicht endgültig sein, für Klasse 6 ist sie aber zunächst ausreichend.
   Problematisch bei *jeder* Art von Begriffsbildung sind die Übergeneralisierung oder die Untergeneralisierung. Unter Übergeneralisierung versteht man, wenn sich die Schüler den Sachverhalt zu bildlich oder zu stark an ein Beispiel gebunden verinnerlichen (Frage an Klasse 6: Ist $\diamond$ ein Quadrat? Oder ■? Antwort ist meist Nein, da sie nur Bleistiftstrich-Quadrate auf Karopapier gezeichnet haben). Unter Untergeneralisierung ist zu verstehen, wenn nicht alle notwendigen Aspekte eines Sachverhalts verinnerlicht werden (so zeichnet ein Schüler der Klasse 6 statt eines geforderten Quadrats gelegentlich ein Rechteck, da er nur die rechten Winkel im Auge hat).

3. Umkreis
   Man frage Schüler der Klasse 7 oder 8 zunächst, wo alle Punkte liegen, die zu zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben, und sie werden relativ schnell auf die Mittelsenkrechte schliessen. Obacht: Man sollte die Schüler dabei auf die Ebene beschränken, denn die räumliche Vorstellung der Ebene aller Mittelsenkrechten, die o.g. Bedingung erfüllt, ist schon vorhanden. Man festige nun den Begriff Mittelsenkrechte in der mathematischen Form.
   In der folgenden Stunde weite man das Problem auf drei Punkte in der Ebene an einem Beispiel, z.B. Landkarte, aus und lasse die Schüler selbständig einen Punkt finden, den von den drei Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Sie werden nach einiger Zeit drauf kommen, dass sich der Umkreismittelpunkt aus den drei Mittelsenkrechten konstruiert. Obacht: Hier muss der Praxisbezug gewahrt bleiben. Ist dieser Punkt auf der Landkarte nicht erreichbar (z.B. in einem See), werden die Schüler das Prinzip nur schwerlich verinnerlichen.
   In einer weitern Stunde kann man die Problemstellung auf ein Viereck anwenden und die Schüler feststellen lassen, dass das nur in einem Sehnenviereck geht.

4. Kurvendiskussion
   Man gebe Schülern die Klasse 11 eine Funktion der Form

   $$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x$$

   und lasse sie nach Wendepunkten suchen. Sie werden zweimal ableiten, $f'(x) = x + \cos x$ bzw. $f''(x) = 1 - \sin x$, und die zweite Ableitung gleich Null setzen. Dabei stellen sie fest, dass diese Bedingung für $\frac{\pi}{2}$ erfüllt ist, und setzen dort einen Wendepunkt an. Dies ist falsch, wie der Graph eindeutig zeigt. Man kann ihnen dieses Verhalten der veränderlichen Linkskrümmung mit zwei Luxuskarossen verdeutlichen, die sich in einer seeeehr langgezogenen Linkskurve beständig gegenseitig überholen. Dabei schlägt jeder der beiden Fahrer das Lenkrad mal mehr, mal weniger stark nach links ein (quasi der Sinus-Einfluss), ohne jedoch jemals rechts zu lenken, denn das hätte fatale Folgen.

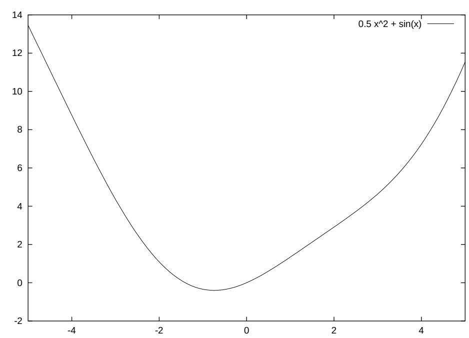

Abbildung 4.1: Graph der Funktion von Beispiel 4

Kapitel 5

Problemlösung

Zur Einstimmung vier Problemstellungen. Die geneigte Leserin bzw. der geneigte Leser wird aufgefordert, die Lösung zu suchen und sich dabei selbst zu beobachten. Im ersten Abschnitt sind einige Prinzipien aufgeführt, die bei derlei Problemen greifen.

- Ein (mathematisches) Palindrom ist eine Zahl, die von vorne wie von hinten gelesen werden kann, z.B. 13631. Behauptung: Alle vierstelligen Palindrome sind durch 11 teilbar. Stimmt das?
- Robert sammelt Würmer, Eidechsen und Käfer. Er hat insgesamt 12 Exemplare gefangen, dabei mehr Würmer als Eidechsen und Käfer zusammen. Insgesamt hat seine Sammlung 26 Beine. Wie viele Eidechsen, Käfer und Würmer hat er?
- Jemand behauptet, auf einem Schachbrett könne man 204 Quadrate unterbringen. Stimmt das?
- In einem Kaufhaus bekommt man 20 % Rabatt, muss aber 16 % Mehrwertsteuer entrichten. Ist es vorteilhater, erst den Rabatt zu bekommen und dann die Steuern zu zahlen oder umgekehrt?

5.1 Prinzipien bei der Problemlösung

Was ist überhaupt ein Problem? Eine mögliche Erklärung eines mathematischen Problems ist folgende:

> Ein Problem ist eine mathematische Fragestellung, deren Lösung man nicht auf den ersten Blick sieht.

Man kann bei Schülern, die sich mit solcherlei Problemen beschäftigen, gewisse Handlungsprinzipien erkennen. Diese kann man den Schülern als Tipps an die Hand geben, wenn diese einmal nicht mehr weiter wissen:

- Spezialfälle betrachten (Gegenbeispiel);
- Systematisch suchen;
- Verallgemeinern;
- Verallgemeinerung und Spiel mit Komponenten;
- Problemerweiterung und Änderung der Elemente;

- Überblick über die Situation verschaffen und das Problem verstehen;
- geeignete Teilprobleme identifizieren oder Spezialisieren;
- Test;
- Nachbereitung;
- Überaschungseffekte nutzen;
- Spezialfälle betrachten.

5.2 Problemlösungsstrategien

Folgendes „Kochrezept“ kann man Schülern, die an Problemlösungen verzweifeln, hinweisartig verabreichen, um diese selber die Lösung erarbeiten zu lassen. Dabei müssen die einzelnen Punkte nicht chronologisch abgearbeitet werden, sondern man sollte erkennen, wo es bei den Schülern hakt und dann entsprechende Tipps geben. Auf gar keinen Fall sollte die Lösung vorgestellt werden, wenn die Schüler diese selber erarbeiten können (Stichwort Motivation, siehe auch beim genetischen Prinzip).

1. Erfasse und verallgemeinere die Aufgabe!
   (a) Du musst die Aufgabe verstehen!
   (b) Erfasse die gegeben und gesuchten Grössen!
   (c) Du musst die Beziehungen in der Aufgabe verstehen!
   (d) Schätze, wenn möglich, das Ergebnis!
2. Erfasse den mathematischen Ansatz!
   (a) Ist ein Formalismus anwendbar? Wenn ja, gehe zu b, wenn nein, zu c!
   (b) Stelle den Formalismus auf (z.B. eine Formel)!
   (c) Bestimme (eine) Gleichung(en), durch die die gesuchte(n) Grösse(n) ermittelt werden können!
   (d) Stelle einen Ansatz zur Berechnung der Hilfsgrössen auf!
3. Löse die mathematischen Aufgaben!
   (a) Überschlage!
   (b) Rechne unter Umständen die Masseinheiten um!
   (c) Berechne die Hilfsgrössen (ggf. in einer Nebenrechnung)!
   (d) Berechne die gesuchte(n) Grösse(n)!
4. Werte das/die Ergebnis(se) aus!
   (a) Vergleiche den Überschlag (oder das geschätzte Ergenbis) mit dem erhaltenen Resultat!
   (b) Überprüfe das Ergebnis am Text der Aufgabe!
   (c) Formuliere einen Antwortsatz!

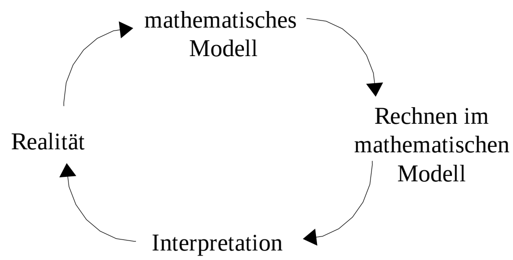

Abbildung 5.1: Problemlösungsstrategie

5.3 Phasen des Problemlösens nach Mason

Mason hat aus allen von ihm beobachteten Problemlösungen drei Phasen herausgearbeitet, die eigentlich immer durchlaufen werden. Dies muss nicht linear geschehen, sondern kann auch von Phase 2 oder von Phase 3 wieder zu Phase 1 zurückkehren.

1. Planungsphase
   Was ist gegeben, was gesucht? Was ist das Ziel? Welche Hilfsmittel sind einsetzbar? Man möchte damit eine gewisse Vertrautheit mit dem Problem erreichen.

2. Durchführung
   Welche Schwierigkeiten treten auf? Wie sind sie zu überwinden? Fühlt man sich sicher?

3. Rückschau
   Test, Beurteilung von Lösungsideen, Möglichkeiten der Verallgemeinerung

Man findet in nahezu jeder Klassenstufe Hilfestellungen zur Problemlösung, die in Form von Fragen formuliert werden können.

5.4 Lerntypen nach Gagné

Gangné stellt in seinem Buch [6] folgende Lerntypen vor:

1. Grundformen des Lernens

   (a) Signallernen
   Verbindung von Wirkungsreiz und Signalreiz, klassisches Konditionieren
   Beispiele: Pawlowscher Hund, Luftstrom am Auge mit verbundenem Signalreiz;

   (b) Reiz-Reaktions-Lernen
   Aufbau einer Reiz-Reaktionsverbindung durch Verstärkung, instrumentelles Konditionieren
   Beispiele: Kleines Einmaleins, Aussprache von „symmetrisch“ oder „Hypotenuse“;

   (c) Kettenbildung
   Lernen von Automatismen, Aufbau längerer Reiz-Reaktions-Ketten
   Beispiele: Schriftliche Rechenverfahren, Lösungen von Gleichungen nach Schema F;

   (d) sprachliche Assoziation
   Aufbau sprachlicher Ketten, verbales Auswendiglernen
   Beispiele: Zählen lernen, Kenntnis der Einmaleinsreihen, Kenntnis der ersten n Nachkommastellen von π.

2. Intellektuelle Fähigkeiten

   (a) Diskrimination
   Unterscheiden lernen, auf unterschiedliche Reize unterschiedliche Reaktionen zeigen
   Beispiele: Quadrate von Dreiecken unterscheiden, Was ist ein Torbogen?

   (b) Begriffsbildung
   Gemeinsamkeiten erkennen, auf verschiedene Reize ggf. gleich reagieren
   Beispiele: Kante eines Quaders, Seite eines Dreiecks, Abschnitt auf einer Zahlgeraden sind Strecken; ein gleichseitiges Dreieck, ein Reckteck, ein Kreis sind achsensymmetrisch;

   (c) Regelbildung
   Zusammenhänge durch Erklärung erfassen, Einsicht in die Verknüpfungen von Begriffen
   Beispiele: für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, Lösung einer quadratischen Gleichung, Satz des Pythagoras;

   (d) Problemlösung
   Regeln höherer Ordnung durch eigene Überlegung verstehen, Regeln situationsangemessen einsetzen; im Vordergrund steht dabei die *Eigenaktivität* des Problemlösens.
   Beispiele: Zusammenhang zwischen der Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung und der zugehörigen Parabel erarbeiten, Sachaufgaben mathematisch beschreiben.

3. Kognitive Strategien
   Fähigkeit, das eigene Lernen, Erinnern und Denken zu steuern; Kontrollprozesse; heuristsiche[1] Regeln
   Beispiele: Nutzung von Rechenvorteilen, Zeichnen von Planfiguren, Nutzung von Diagrammen.

4. Motorische Fähigkeiten

5. Einstellungen

5.5 Lerntypen mathematischen Lernens und ihre Bedingungen

Grundbedingungen für alle Lerntypen: Aufmerksamkeit, Rückmeldung (vgl. [2])

[1] Heristik: 1. methodische Anleitung, Neues zu finden; 2. Wissenschaft von den nichtmathematischen Methoden der Erkenntnisfindung

Typ	Bedingungen
assoziatives Lernen	häufige Wiederholungen Vertstärkungen rasche Rückmeldung
Diskriminationslernen	Unterschiede hervorheben (bunte Kreide) Kontiguität
Lernen mathematischer Begriffe	Fähigkeit zur Diskrimination von Beispielen relevante Merkmale hervorheben mehrere Beispiele (irrelevante Merkmale variieren) Gegenbeispiele (Kontrastprinzip)
Lernen mathematischer Regeln	Klärung vorgeordneter Begriffe und Regeln (Regelstruktur!) verbale Hinweise Veranschauunghilfen
Lernen heuristischer Regeln	häufiger Hinweis auf Anwendungsfälle kognitives Modellieren eigene Anwendung in neuen Fällen Hervorheben zweckmässiger Verfahren Rückblick auf bereits gelöste Aufgaben
Lösen mathematischer Probleme	Geläufigkeit relevanter Regeln und Begriffe Problelösefähigkeiten (analysieren, vergleichen, Beziehungen herstellen) Fähigkeit, heuristische Regeln einzusetzen Prinzip der minimalen Hilfe (Motivationshilfe – heuristische Hilfe – inhaltliche Hilfe)

5.6 Leitideen des Sachrechnens

Zur Anschauung ein Beispiel nach *Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 1998.* Sie stellen folgende Forderungen an die Lösung der Problemstellung Sachrechnen, fussend auf den Lerntypen wie in den Abschnitten 5.4 und 5.5 beschrieben.

- Bereitstellung sinnstiftender Lernanlässe
  aus dem Erfahrungsbereich der Kinder Beispiele heranziehen, die die Thematik begründen und zur Problemlösung motivieren;
- Lernen auf eigenen Wegen
  Begriffsbildung zulassen und unterstützen;
- Erstellen von Notationsformen;
- gemeinsame Reflexion der Eigenprodukte
  Diskussion verschiedener Lösungswege;
- fortschreitende Schematisierung bzw. Mathematisierung.

Sie stellen die These auf, dass im Sachrechnen situationsbezogen komplexe Fähigkeiten erworben werden können. Sachrechnen ist demnach ein Problem lösen, das durch seinen Alltagsbezug die Sinnhaftigkeit mathematischen Wissens verdeutlicht.

Kapitel 6

Das Lernen mathematischer Begriffe

Was sind überhaupt „Begriffe“? Begriffe strukturieren eine Welt wirklicher und gedachter Objekte durch Klassenbildung. Sie beschreiben das Gemeinsame einer Menge von Objekten und sind mentale Einheiten im Rahmen einer kognitiven Struktur. Mathematische Begriffe lassen sich in zwei Arten unterteilen:

- Grundbegriffe einer eher axiomatischen Mathematik
  sind Begriffe, die „keiner Erklärung bedürfen“ im Sinne des Schulunterrichts, wie z.B. Punkt, Gerade, ...

- „Zusammengesetzte Begriffe“
  werden durch Definitionen auf andere Begriffe zurückgeführt, wie z.B. der Begriff des Parallelogramms, der Menge etc.

6.1 Teilprozesse nach Ausubel

Ausubel [7] unterscheidet verschiedene Teilprozesse des Lernens mathematischer Begriffe. Diese Begriffsbildung geht dabei nicht linear anhand dieser Prozesse vonstatten, sondern sie werden i.d.R. mehrmals durchlaufen, d.h. bestehende Begriffe werden verändert oder angepasst.

1. diskriminative Analyse verschiedener Reizmuster;
2. Formulierung von Hypothesen, die abstrahierte gemeinsame Merkmale betreffen;
3. Testen von Hypothesen;
4. Auswahl einer Merkmalskombination;
5. Beziehen von Merkmalen auf Ankerideen (d.h. welche Ideen sind für den Begriff grundlegend, welche vernachlässigbar?);
6. Unterscheidung von ähnlichen Begriffen;
7. Verallgemeinern auf alle Objekte/Ereignisse;
8. Repräsentation durch Sprachsymbole.

6.1.1 Schwerpunkte nach Ausubel

Aus den oben formulierten Teilprozessen ergeben sich nach Ausubel folgende Schwerpunkte des Lernens:

1. Erwerb primärer Konzepte,
   z.B. Begrifflichkeiten wie Ball oder Spielwürfel;

2. Erwerb komplexer sekundärer Begriffe aufgrund konkret–empirischer Stützen, womit die Abstrahierung vom Ball zur Kugel oder vom Spielwürfel zum Quader oder zur Quadratischen Form gemeint ist;

3. Erwerb komplexer Begriffe unmittelbar auf die kognitive Struktur bezogen; was z.b. die Begriffsbildung beim abstrakten Ausdruck Primzahlen umfasst.

6.2 Schritte im Begriffsbildungs- bzw. findungsprozess

Zusammenfassend kann man diese Hierachie bei der mathematischen Begriffsbildung bzw. -findung beobachten:

- Hypothesenbildung;
- Klassenbildung;
- Abstraktion;
- Verknüpfen mit Merkmalen zu einer neuen Struktur;
- Vernetzung mit anderen Begriffen;
- Überprüfen des Begriffsinhalts;
- Widerspruchsfreiheit.

6.3 Begriffserwerb

Der Begriffserwerb erfolgt über Beispiele, Gegenbeispiele und verbale Information. Dabei sind Übergeneralisierung (unerwünschte Begriffsverengung) und Übergeneralisierung (unerwünschte Begriffserweiterung)[1] unbedingt zu vermeiden.
Beispiele sollten sich möglichst stark in den irrelevanten Merkmalen unterscheiden. Gegenbeispiele sollten sich in möglichst wenig relevanten Merkmalen unterscheiden.

6.4 Begriffslernen durch Beispiele oder Erklärung

Folgende Teilaspekte sind bei der Vermittlung von Begriffen anhand von Beispielen oder Erklärungen zu beachten:

1. Vorbereitung
   - Identifizierung relevanter und irrelevanter Eigenschaften, wobei das Augenmerk mehr auf letzteren liegen sollte;
   - Vorbegriffe und Lernvoraussetzungen erfassen;

[1] siehe auch Anmerkungen im Beispiel 2 von Abschnitt 4.3.4 – Teil 2

- schülergemässe Definition finden, die nicht unbedingt die mathematische oder minimale Definition sein muss.

2. Motivation

    - Bedeutung des Begriffs (muss für die Schüler bzw. den Schulbereich tragfähig sein);
    - stufengemässe Einführung (d.h. kindgerecht und altersangemessen).

3. Schulung, Kontrolle, Vertiefung

    - Typische Beispiele;
    - neue Beispiele und Gegenbeispiele;
    - komplexe Beispiele (damit sind nicht die komplexen Zahlen gemeint);
    - ähnliche Begriffe.

Beispiel

„Ein Quadrat ist ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten und vier rechten Winkeln“ ist eine überbestimmte, aber für Schüler der Klassenstufe 5 durchaus geeignete Definition.
Relevant sind darin die Eigenschaften *4 Seiten und 4 Ecken (Vierecke), gleichlange Seiten, gleichgrosse Winkel* und *alle Winkel sind rechte Winkel.* Irrelevant sind hingegen Faktoren wie *Lage, Grösse, Farbe* des Quadrats.
Vorgeordnete Begriffe sind *Vier, Seite, Ecke, Viereck, gleichlang, Länge, rechter Winkel*, die die Schüler bereits kennengelernt und verstanden haben sollten. Sie sollten daher in der Lage sein, die Seiten zu messen, die gleiche Länge festzustellen oder die rechten Winkel zu prüfen.
Motivation für den Erwerb der Begrifflichkeit kann/können der Alltagsgebrauch oder Quadrate in der Umwelt der Schüler sein. Hilfen sind z.B. verschiedene gezeichnete Quadrate in verschiedenen Grössen und Lagen.
Zur Übung , Kontrolle und Vertiefung können die Schüler selber verschiedene Quadrate unter Variation von Grösse, Lage und Farbe zeichnen. Ferner kann man andere Beispiele und Gegenbeispiele liefern.

Kapitel 7

Beweisen, Argumentieren und Begründen im Mathematikunterricht

> *„Mmh ... ich erinnere mich gerade irgendwie ... wie unser Lehrer uns das erzählt hat. Aber der hat auch nur gesagt, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt ... der hat das auch nicht irgendwie begründet oder so ...“*
> *Antonia (Klasse 8)*

Dies ist eines von vielen Beispielen, an dem deutlich wird, dass der Mathematikunterreicht offenbar nicht an die Denkmuster der Schüler angepasst wurde, sondern auf mathematische Argumentation zurückgreift. In diesem Kapitel werden noch weitere Beispiele gebracht, die die häuigsten Fehler im Mathematikunterreicht aufzeigen sollen.
Die Beispiele sind entnommen aus der von Frau Prof. Dr. Reiss entworfenen Präsentation zu diesem Thema. Da nicht sichergestellt ist, dass diese Folien auch zukünftig im Internet verfügbar sind, habe ich mir die Freiheit genommen, die Datei im PDF-Format auf meiner Webseite zu spiegeln[1].

7.1 Aspekte des theoretischen Hintergrunds

Zunächst die Kernpunkte verschiedener Theorien zur Unterrichtsgestaltung, wie sie von verschiedenen Gremien erarbeitet wurden:

NTCM Standards 2000

Logisches Argumentieren und Beweisen soll Inhalt des Mathematikunterrichts sein, damit Schüler

- diese Aspekte als wesentlich und nützlich für die Mathematik begreifen können;
- lernen, mathematische Behauptungen aufzustellen und zu untersuchen;
- mathematische Argumentationen und Beweise entwickeln und bewerten können;

[1] http://www.atomkraftwerk-springfield.de/reaktor/beweisen.pdf

- situationsangemessen verschiedene Argumentationen und Beweismethoden auswählen, anwenden und beurteilen können.

Deutsches PISA-Konsortium 2001, S. 141

Mathematical Literacy bezeichnet die Fähigkeit, „die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, *begründete mathematische Urteile abzugeben* und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht.“

Kompetenzstufdenmodell nach Klieme, Neubrand & Lüdtke 2001

- Stufe III
  Modellieren und begriffliches Verknüpfen;

- Stufe IV
  Umfangreiche Modellierungen auf der Basis anspruchsvoller Begriffe;

- Stufe V
  Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren;

- Kernziel I
  Konzepte aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen verknüpfen können und zur Lösung von Problemen nutzen, wenn visuelle Darstellungen den Prozess unterstützen;

- Kernziel II
  Lösungen über Zwischenergebnisse hinweg aufbauen; unter vielfältigen Lösungswegen einen eigenen finden.

„Begriffliche Modellierungsleistungen umfassen Begründungen und Beweise sowie das Reflektieren über den Modellierungsprozess.“

Einschränkungen des präadoleszenten wissenschaftlichen Denkens

- Evidenz[2] gegen eigene Annahmen wird nicht generiert;

- Widersprüche zwischen Evidenz und Theorie führen zur Modifikation der Evidenz und nicht der Theorie;

- Versuchspläne zur Prüfung einer Theorie werden nicht entwickelt, insbesondere Konfundierungen von Variablen nicht berücksichtigt;

- Hypothesen werden früh angenommen, auch wenn Alternativerklärungen nicht ausgeschlossen sind;

- Gegenbeispiele werden nicht als ausreichend zur Widerlegung betrachtet, Anhäufung empirischer Evidenz wird gesucht.

[2] vollständige, überwiegende Gewissheit; einleuchtende Erkenntnis

Aspekte mathematischen Beweisens

Basis: Phasenmodell des Beweisens von Boero (1999)

- Exploration der Problemstellung; Entwicklung einer Hypothese, Identifikation möglicher Argumente;
- Formulierung dieser Hypothese gemäss den Konventionen;
- Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen;
- Auswahl von Argumenten und Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen;
- Organisation der Argumente in einen Beweis, der den mathematischen (Publikations-)Standards entspricht;
- Annäherung an einen formalen Beweis;
- Kontrolle durch die „mathematische Community“.

Der Beweis eines Theorems ist ein Pfad, der von allgemein geteilten Aussagen startet und durch eine Reihe von Schritten einen psychologischen Zustand hervorruft, in dem das Theorem offenkundig erscheint. (Thom, 1973)

Beweise, die Einsicht in die relevanten Begriffe vermitteln, sind für uns als Forscher und Lehrer interessanter und wertvoller als Beweise, die nur die Gültigkeit der Behauptung belegen. Wir haben Beweise gern, die das Wesentliche herausstellen. Wenn der einzig verfügbare Beweis eines Resultats künstlich oder hergeholt erscheint, sind wir irritiert. Wir halten inne und denken nach. (Long, 1986)

7.2 Argumentieren, Begründen und Beweisen am Beispiel der Elementargeometrie – eine empirische Studie

Im Zuge einer Studie der Universität Oldenburg wurden verschieden Altersstufen in allen Schularten auf verschiedene Weise getestet. Frau Prof. Dr. Reiss bindet an dieser Stelle umfangreiche Beispiele und Statistiken ein, auf die ich aus inhaltlichen und Platzgründen weitgehend verzichte. Interessant ist meiner Meinung nach nur das letzte Beispiel, in dem es um folgende Aufgabe geht:

Aufgabe

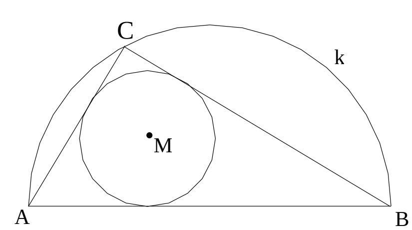

Abbildung 7.1: Skizze zur Beispielaufgabe

$\overline{AB}$ ist der Durschmesser des Halbkreises k. C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B). M ist der Mittelpunkt des Innkreises von $\triangle ABC$. Dann

1. ändert sich die Grösse von $\angle AMB$, wenn sich C auf k bewegt.
2. bleibt die Grösse von $\angle AMB$ für jede Lage von C gleich, kann aber ohne den Radius zu kennen nicht berechnet werden.
3. $\angle AMB = 135°$ für alle C.
4. $\angle AMB = 150°$ für alle C.

Zwei Lösungen aus den Gesprächen

Lucia (Grundkurs) „3. und 4. können schon mal nicht zutreffen, weil ... Pythagoras ... hat gesagt, dass der Winkel immer rechtwinklig ist in C nach diesem Kreis. Also treffen die schon mal nicht zu. Deshalb kann 1. auch nicht zutreffen, weil sich die Grösse des Winkels nicht ändert, wenn sich C auf k bewegt. Also nehmen wir 2. Ist das Einzige was übrig bleibt. Das kommt dann nämlich auch ganz gut hin, weil der Winkel immer gleich bleibt. Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist.“
„Rein gefühlsmässig würde ich sagen, der Winkel ... hat immer 135 Grad, weil sich dieser Winkel ja auch nicht verändert. Aber mathematisch ist das nicht gerade.
Ja doch, also ich gehe mal davon aus, wenn dieser Winkel immer 90 Grad bleibt, wie ich das ja schon vorhin erklärt habe und das hoffentlich richtig ist, dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte, wenn sich das Dreieck fortbewegt. “

Konstanze (Grundkurs) zu 1.: „Der Winkel bei C bleibt gleich. Bleibt der gleich? Der Kreis wird weggerollt, deswegen bleibt der Winkel auch gleich.“
zu 2.: „Doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden, auch ohne den Radius. “ „Der Winkel bleibt immer gleich, da bin ich mir ganz sicher. Aber den kann man bestimmt berechnen, deswegen kann ich 2. nicht ankreuzen.“
zu 3. und 4.: „Er bleibt gleich. Was mache ich jetzt? Berechnen kann ich ihn nicht. Glaub ich nicht. Ohne irgendwelche Werte.“

Bewertung

Lucia (Grundkurs)

- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert;
- Widersprüche zwischen Evidenz und Theorie führen nicht zur Modifikation der Theorie („Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist.“);
- Empirische Argumente wechseln im Verlauf der Problemlösung zu mathematischen Argumenten („dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte“).

Konatanze (Grundkurs)

- Hypothesen werden früh angenommen, auch wenn Alternativerklärungen nicht ausgeschlossen sind;
- Plausibilitätsargumente werden wesentlich zur Bearbeitung herangezogen („doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden“);
- Es wird kein angemessener Plan für die Lösung entwickelt;

- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert („der Winkel bleibt gleich, da bin mir ganz sicher"), insbesondere ist die notwendige Exploration der Problemstellung weitestgehend unvollständig.

„Weshalb lernen so viele Schulkinder die Mathematik fürchten? Vielleicht teilweise deswegen, weil wir versuchen, ihnen diese formalen Definitionen beizubringen, die entworfen wurden, um zu Bedeutungsnetzen zu führen, die so knapp und dünn wie möglich sind. Wir sollten ihnen lieber helfen, in ihren Köpfen widerstandsfähigere Netzwerke zu knüpfen." (Marvin Minsky 1985)

Kapitel 8

Die PISA-Studie

Zum Abschluss der Veranstaltung hat Frau Prof. Dr. Reiss zwei Sitzungen darauf verwendet, die PISA-Studie näher zu beleuchten. Dazu griff sie auf eine PowerPoint-Präsentation zurück, die vom Niedersächsischen Kultusministerium erstellt wurde und auf dem Niedersächsischen Bildungsserver (http://www.nibis.de) zu finden ist. Da hierin sehr viele Statistiken bemüht werden, verzichte ich komplett auf die Darstellung. Aus o.g. Gründen habe ich auch diese Folien ebenfalls auf dem Server[1] gespiegelt.

[1] http://www.atomkraftwerk-springfield.de/reaktor/pisa2000.ppt

Index

Literaturverzeichnis

[1] HEYMANN, H.W.: *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim : Beltz, 1996

[2] ZECH, Fr.: *Grundkurs Mathematikdidaktik.* 9. Auflage. Weinheim : Beltz, 2000

[3] SCHWEIGER, F.: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematikdidaktik* (1992), Nr. 13, S. 199–214

[4] WINTER, H.: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: *mathematik lehren* (1984), Nr. 2, S. 4–16

[5] WITTMAN, E. Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* 6. Auflage. Braunschweig : Vieweg, 1995

[6] GAGNÉ, R.N.: *Die Bedingungen menschlichen Lernens.* Hannover : Schroedel, 1969

[7] AUSUBEL, D. P.: *Psychologie des Unterrichts.* 1. völlig überarb. Auflage. Weinheim : Beltz, 1980