

Der Abstand windschiefer Geraden

Eine Betrachtung aus didaktischer Perspektive

Lars Hoegen

`homer.simpson@atomkraftwerk-springfield.de`

30. April 2004

Die nachfolgenden Ausführungen stellen eine Zusammenfassung einer Einheit dar, die ich im Rahmen des Seminars *Einführung in die Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* hielt, das im Sommersemester 2004 unter der Leitung von Herrn Hon. Prof. Dr. Günther Steinberg veranstaltet wird.

1 Einleitung

Im Curriculum der Sekundarstufe II (in Niedersachsen) ist die Analytische Geometrie nicht zwingend vorgesehen, sondern fakultativ. Tatsächlich wird sie aber an sehr vielen Schulen in den Jahrgängen 11 bis 13 anhand von Standardproblemen eingeführt. Dabei wird auch das Feld der Linearen Algebra berührt.

Eines dieser Standardprobleme ist der Abstand windschiefer Geraden. Ich möchte in diesem Dokument drei verschiedene mathematische Lösungsmethoden vorstellen und eine vierte skizzieren. Die didaktischen Aspekte dieser Methoden werden an gegebener Stelle erläutert.

2 Wann werden windschiefe Geraden behandelt?

Betrachtet man die Stoffverteilungspläne an den Schulen, wird man feststellen, daß die Abstandsbestimmung zwischen windschiefen Geraden in der Regel als eines der letzten Probleme in der Analytischen Geometrie behandelt wird. Es stellt eine Verallgemeinerung der Probleme Abstand Ebene-Ebene, Abstand Punkt-Ebene und Abstand Punkt-Gerade dar.

Demzufolge sollten die SchülerInnen vertraut sein mit den verschiedenen Darstellungsweisen von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$; wesentliche Stichworte sind hier die Parameter- und die Normalenform. Ebenso sollte das Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS) behandelt und in Form von Schnittpunkts- und Schnittgeradenbestimmung mit der Analytischen Geometrie verknüpft worden sein.

Bei der Normalenform von Ebenen und Geraden wird auch das Skalarprodukt eingeführt, mit dessen Hilfe man ein Kriterium für die Orthogonalität zweier Vektoren hat. Die dritte von mir vorgestellte Methode setzt darüber hinaus das Vektorprodukt zweier Vektoren als gegeben voraus.

3 Ein erster Zugang über ein Modell

Wann sind zwei Geraden windschief? Die mathematische Definition besagt, daß zwei Geraden zueinander windschief sind, wenn sie

- keinen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt) haben und
- zueinander nicht kollinear sind.

Beide Kriterien sollten den SchülerInnen bekannt sein, zumindest aus der ebenen Geometrie der Sekundarstufe I. Vor *jeder* Abstandsbestimmung an konkreten Beispielen sollten diese Kriterien geprüft werden. Die Prüfung auf Schnittpunktfreiheit kann dabei als Training für das Lösen eines LGS herangezogen werden. Anhand der Prüfung auf Kollinearität können Begriffe wie Orts-, Stütz- und Richtungsvektor wiederholt werden.

Da einige SchülerInnen häufig Probleme mit dem Schrägbild von räumlichen Geraden haben, die zu Fehlinterpretationen führen („Die Geraden auf der Tafel haben doch einen Schnittpunkt“), empfiehlt es sich, den Klassenraum als dreidimensionalen Anschauungsraum zu betrachten. Man kann zwei windschiefe Geraden mit zwei Schnüren modellhaft nachbilden, die quer durch den Raum gespannt werden. Den Koordinatenursprung kann man dann in einer Ecke des Raumes definieren, von der aus dann die Orts- und Stützvektoren in den Raum zeigen. Auch diese kann man mit Schürsen modellieren.

Wenn man dieses Modell im Klassenraum hängen hat, sollte man alle Schritte, die zur Lösung des Problems notwendig sind, immer wieder sowohl im Schrägbild als auch am Modell verdeutlichen, um die Gefahr von Unter- wie auch die von Übergeneralisierung möglichst zu minimieren.

4 Kriterien für den kleinsten Abstand

Man kann die Schülerinnen und Schüler nun Hypothesen formulieren lassen, welchen Abstand die so modellierten Geraden voneinander haben und wo dieser kleinste Abstand zu finden ist. Von den vorher behandelten Standardproblemen (s.o.) wissen die SchülerInnen, daß mit „Abstand“ stets der kleinste Abstand gemeint ist.

Ein weiteres, bei der Hypothesensuche vielleicht hilfreiches Modell sieht wie folgt aus: Man nehme zwei Besenstiele, die Geraden darstellen und fordere vier Schülerinnen oder Schüler auf, diese windschief in den Raum zu halten. Spannt man nun dazwischen ein Gummiseil, das mit zwei Schlaufen frei auf beiden Stielen gleitet, so wird dieses bestrebt sein, den kleinsten Abstand zwischen den Geraden einzunehmen.

Egal, wie die SchülerInnen nun die Besenstiele zueinander halten, jedesmal nimmt das Gummiseil den kleinsten Abstand ein. Man kann mit diesem Modell nun die verschiedensten windschiefen Geraden darstellen und die SchülerInnen nach Gemeinsamkeiten suchen lassen. Mit Hilfe des Tafel-Geodreiecks werden sie recht bald feststellen, daß das Gummiseil immer senkrecht auf beiden Besenstielen steht. (Das Seil muß dabei sehr frei gleiten können, evtl. sollte man Rollen zu Hilfe nehmen.)

Diese Hypothese ist Ausgangspunkt und (vorläufig) einziges Kriterium für die weiteren Überlegungen. Ihr Aussagegehalt sollte daher auf etwa folgenden Satz konkretisiert werden: „Der Vektor, der den kleinsten Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden im Raum beschreibt, steht senkrecht auf beiden Geraden.“

Es ist wichtig, diese Hypothese auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu überprüfen. Mathematisch läßt sich dieser Sachverhalt sehr leicht mit Hilfe des Satzes von Pythagoras belegen, wie Abbildung 1 zeigt.

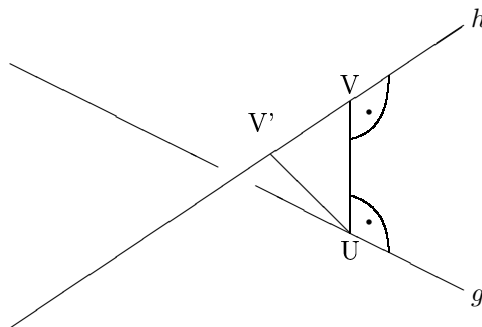


Abbildung 1: Der Abstandsvektor windschiefer Geraden

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{UV}$ sei der Abstandsvektor der Geraden g und h . Jeder Punkt $V' \neq V \in h$ bildet mit den Punkten U und V demnach ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $|\overrightarrow{UV'}|^2 = |\overrightarrow{UV}|^2 + |\overrightarrow{VV'}|^2$, woraus folgt:

$$|\overrightarrow{UV'}| \geq |\overrightarrow{UV}|$$

Analoge Folgerungen gelten für alle Punkte $U' \neq U \in g$. Damit bildet $\overrightarrow{UV}$ den kleinsten Abstand.

Man kann dies wiederum am Fadenmodell belegen, wenn man z.B. das Tafel-Geodreieck und einen Faden zu Hilfe nimmt. Man hält nun das Geodreieck im Punkt U senkrecht an die Gerade g und bildet somit mit der Kante den Verbindungsvektor $\overrightarrow{UV}$ nach. Mit Hilfe des Fadens kann man nun zeigen, daß jede denkbare Strecke auf den beiden oben dargestellten Dreiecken länger ist als die vom Geodreieck belegte Vektorlänge.

5 Abstandsberechnung

Wir wissen nun, daß ein Vektor, der den kleinsten Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden beschreibt, senkrecht auf beiden Geraden steht. Diese Bedingung kann man für die Berechnung des Abstandes heranziehen.

Betrachten wir die windschiefen Geraden

$$g : \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}_G + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad \text{und} \quad h : \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_H + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

deren Abstand im Folgenden bestimmt werden soll. Auf den Nachweis, daß die Geraden windschief sind, wird hier verzichtet. Die / Der geneigte LeserIn möge ihn selbst erbringen.

5.1 Methode: Allgemeiner Punkt

Wir bestimmen je einen Punkt auf der Geraden g bzw. auf der Geraden h . Grundidee dieser Methode ist, daß man diese beiden Punkte auf den jeweiligen Geraden frei

bewegen kann. Bildet man zwischen beiden Punkten den Verbindungsvektor, so muß man die Punkte so verschieben können, daß dieser Vektor senkrecht auf beiden Geraden steht und somit den Abstandsvektor repräsentiert. Man bildet quasi das oben beschriebene Besenstiel-Modell nach.

Die Punkte auf der Geraden g werden beschrieben durch den Ortsvektor

$$\vec{X}_g = \begin{pmatrix} -3 + 4\lambda \\ 9 - \lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix}$$

Analog folgt für einen beliebigen Punkt auf der Geraden h

$$\vec{X}_h = \begin{pmatrix} 8 + 4\mu \\ 4 + 3\mu \\ 4 + 4\mu \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten hat demnach die Form

$$\overrightarrow{X_g X_h} = \begin{pmatrix} 11 + 4\mu - 4\lambda \\ -5 + 3\mu + \lambda \\ 4 + 4\mu - 8\lambda \end{pmatrix}$$

Nun soll $\overrightarrow{X_g X_h}$ senkrecht auf beiden Geraden stehen, d.h. λ und μ müssen dementsprechend gewählt werden.

Die SchülerInnen sollten an dieser Stelle selbständig die methodische Verbindung zum Skalarprodukt herstellen (Lernen als gedankliche Vernetzung). Sie sollten ferner wissen/verstanden haben, daß man die Richtungsvektoren einer Gerade frei entlang dieser verschieben kann (siehe Abschnitt 7.1). Die Schlussfolgerung, daß, da der Vektor $\overrightarrow{X_g X_h}$ auf beiden Richtungsvektoren senkrecht stehen soll, deren Skalarprodukt gleich Null sein muß, kommt dann recht schnell zustande.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\overrightarrow{X_g X_h}^T \cdot \vec{u} = 0 : \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) - (-5 + 3\mu + \lambda) + 8(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

$$\overrightarrow{X_g X_h}^T \cdot \vec{v} = 0 : \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) + 3(-5 + 3\mu + \lambda) + 4(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

$$81 + 45\mu - 81\lambda = 0$$

$$45 + 41\mu - 45\lambda = 0$$

mit den Lösungen $\lambda = 1$ und $\mu = 0$.

$\lambda = 1$ eingesetzt in g ergibt $U(1|8|8)$, $\mu = 0$ in h eingesetzt ergibt $V(8|4|4)$. Eine allgemeine Darstellung des Abstandsvektors gewinnt man nun, wenn man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{UV}$ bildet und als Richtungsvektor auffaßt; als Stützvektor kann der Ortsvektor von U (oder V) dienen:

$$\vec{n} : \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Abstand berechnet sich zu $d(g, h) = |\overrightarrow{UV}| = 9$

5.2 Methode: Vektorkette

Man bestimmt aus der Bedingung, daß der Abstandsvektor $\overrightarrow{UV}$ senkrecht auf beiden Geraden steht, zunächst dessen Richtungsvektor $\vec{n}$. Dann betrachtet man eine geschlossene Vektorkette gemäß Abbildung 2.

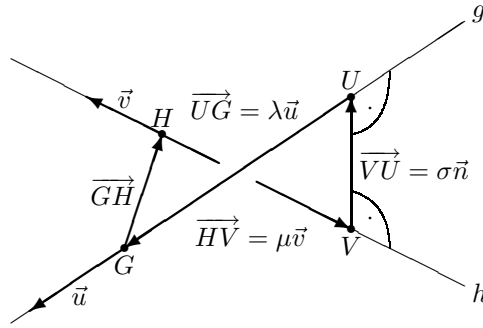


Abbildung 2: Geschlossene Vektorkette

Der Richtungsvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{n}^T \cdot \vec{u} &= 0 : & 4n_1 - n_2 + 8n_3 &= 0 \\ \vec{n}^T \cdot \vec{v} &= 0 : & 4n_1 + 3n_2 + 4n_3 &= 0\end{aligned}$$

Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, demzufolge muß es einen Freiheitsgrad geben. Das LGS hat die Lösung $\nu \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Vektorkette stellt sich demnach wie folgt dar:

$$\begin{aligned}\vec{GH} + \vec{HV} + \vec{VU} + \vec{UG} &= \vec{0} \\ \vec{GH} + \mu \vec{v} + \sigma \vec{n} + \lambda \vec{u} &= \vec{0} \quad || \cdot \vec{n}^T \\ \vec{n}^T \cdot \vec{GH} + \underbrace{\vec{n}^T \cdot \mu \vec{v}}_{=0} + \vec{n}^T \cdot \sigma \vec{n} + \underbrace{\vec{n}^T \cdot \lambda \vec{u}}_{=0} &= 0 \\ \vec{n}^T \cdot \vec{GH} + \sigma \vec{n}^T \cdot \vec{n} &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sigma = -\frac{\vec{n}^T \cdot \vec{GH}}{\vec{n}^2} = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$$

Daraus läßt sich der Abstand der Geraden ermitteln:

$$d(g, h) = |\vec{VU}| = |\sigma \vec{n}| = 9$$

Braucht man noch die Punkte U und V , so setzt man σ und $\vec{n}$ in die Vektorkette ein und löst das entstehende LGS für μ und λ .

5.3 Methode: Parallele Ebenen

Diese Methode beruht auf der Möglichkeit, zu zwei windschiefen Geraden genau ein Paar paralleler Ebenen zu finden, in denen g und h liegen. Der Abstand der Geraden ist dann gleich dem Abstand der Ebenen.

Der Ansatz für diese Lösung könnte die Überlegung sein, daß man z.B. die Gerade h parallel so projizieren kann, daß die so konstruierte Gerade h' sich mit g schneidet. Der Schnittpunkt U bildet dann den Aufpunkt einer Ebene E_1 . Zusammen mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kann man deren Parameterform angeben.

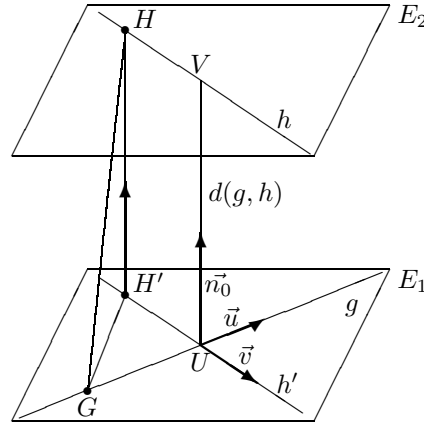


Abbildung 3: Parallele Ebenen

Die zweite Ebenengleichung findet man durch Parallelprojektion der Gerade g durch die Gerade h (mit den Schnittpunkt V). Da beide Ebenen die gleichen Richtungsvektoren haben, sind sie parallel, siehe Abbildung 3.

Man erhält einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebenen, indem man das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ der beiden Richtungsvektoren bildet. Dieser Vektor ist frei in beiden Ebenen verschiebbar. Man kann ihn so platzieren, daß er durch den Aufpunkt H der Ebene E_2 läuft. Sei H' die zum Normalenvektor parallele Projektion von H auf E_1 . Dann bilden die Punkte G, H' und H ein rechtwinkliges Dreieck.

Man kann sich nun eine geometrische Deutung des Vektorproduktes zu Nutze machen. Das Vektorprodukt $\vec{GH}^T \cdot \vec{n} = |\vec{GH}| |\vec{n}| \cos(\angle \vec{GH} \vec{n})$ stellt die Projektion des Vektors $\vec{GH}$ auf den Vektor $\vec{n}$ multipliziert mit dessen Norm $|\vec{n}|$ dar.

Da wir die Längenmessung immer bezüglich der Einheitslänge des zugrunde gelegten Koordinatensystems angeben, $\vec{n}$ aber eine variable Länge hat, ist es zweckmäßig, die Projektion nicht auf $\vec{n}$ anzuwenden, sondern auf den normierten Normalenvektor $\vec{n}_0$, der nach Definition die Einheitslänge hat. Dazu müssen wir den durch das Vektorprodukt gefundenen Vektor noch durch seine Norm (seine Länge) teilen.

Man hat damit einen Ausdruck, mit dem sich direkt der Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden bestimmen läßt:

$$d(g, h) = \left| \vec{GH}^T \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right|$$

Beachte: Die Betragsstriche im Nenner des Bruches bezeichnen die Norm eines Vektors, die großen Betragsstriche den Betrag einer Zahl (bzw. die Norm eines eindimensionalen Vektors).

Für unser Beispiel ergibt sich dann:

$$d(g, h) = \left| \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -28 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{36} (-308 - 80 + 64) = 9$$

5.4 Methode: Extremwertuntersuchung in der Analysis

Die vierte Herangehensweise sei hier nur kurz skizziert. Man wählt im Prinzip die bei der Methode *Allgemeiner Punkt* dargestellte Strategie und löst das Problem mit

Hilfe der Funktionsanalysis.

Man wähle zwei Punkte so, daß sie auf der Geraden g bzw. auf der Geraden h frei beweglich sind. Wenn man ihren Abstand über die Norm ihres Verbindungsvektors berechnet, erhält man eine Gleichung mit zwei freien Parametern, in unserem Fall λ und μ :

$$d(g, h) = [(11 + 4\mu - 4\lambda)^2 + (-5 + 3\mu + \lambda)^2 + (4 + 4\mu - 8\lambda)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Die dargestellte Funktion beschreibt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ (natürlich über den Koordinaten λ und μ), die einen echten Tiefpunkt an der Stelle des minimalen Abstandes aufweist. Man kann diesen mit Hilfe der Gradienten und des Laplace-Operators bestimmen.

Der hier dargestellte Zugang kann auch als Motivation für die Einführung der Analysis mit mehreren Variablen sein. Man weitet ein aus der analytischen Geometrie bekanntes (und vielleicht auch schon gelöstes) Problem aus und entwickelt daran die Methoden der Analysis.

6 Bemerkungen

Der erste der vorgestellten Lösungsansätze ist sicherlich der, den SchülerInnen am ehesten selber entwickeln, gerade wenn sie im Umgang mit dem Lösen linearer Gleichungssysteme gut geübt sind. Der Rechenaufwand ist allerdings sehr hoch, da zunächst Punkte bestimmt werden müssen, um dazwischen einen Vektor aufzuspannen.

Die zweite Methode vermeidet diesen Aufwand, fordert dafür aber eine etwas abstraktere Denkleistung in Bezug auf die mathematische Begründung für die gewählte Strategie. Die Bestimmung eines allgemeinen Ausdrucks für einen Normalenvektor beider Geraden führt häufig bei schwächeren SchülerInnen wegen des frei wählbaren Parameters zu Verständnisschwierigkeiten und wirkt demotivierend.

Der Vorteil der ersten beiden Methoden ist, daß sie zum Verständnis nur das Wissen über die Bedeutung des Skalarproduktes orthogonaler Vektoren sowie Fähigkeiten im Umgang mit Linearen Gleichungssystemen voraussetzen. Zudem sind die Zugänge leicht am Fadenmodell anschaulich zu machen.

Die dritte Methode erfordert die vorherige Einführung des Vektorprodukts, auch Kreuzprodukt genannt. Da die dargestellte Methode eine Anwendung ist, die die (gegebenen) Eigenschaften des Vektorprodukts ausnutzt, ist eine Herleitung an diesem Problem nicht ratsam bzw. unmöglich. Zum Vertiefen des Themas Vektorprodukt kann diese Methode aber sicherlich gut herangezogen werden. Der große Vorteil der hergeleiteten Beziehung ist deren Allgemeingültigkeit in Kombination mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand.

Diese Abstandsgleichung gilt nicht nur für den im Unterricht betrachteten Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$, sondern für beliebige Vektorräume (ja sogar in der Kugelgeometrie). Prinzipiell kann man in höherdimensionalen Vektorräumen auch die ersten beiden Verfahren anwenden, aber der dabei betriebene Rechenaufwand ist unverhältnismäßig höher.

Bei allen drei Methoden kann ein Taschenrechner mit CA-System sehr hilfreich sein. Die SchülerInnen können ihn zum Lösen der LGS heranziehen oder sogar ein Flußdiagramm der Lösungsmethoden erstellen, anhand dessen sie ein Programm zur Abstandsbestimmung schreiben können.

Der geschätzte Zeitaufwand für eine komplette Betrachtung des Abstandes windschiefer Geraden liegt – unabhängig von den hier genannten Methoden – bei etwa sechs Unterrichtsstunden in einem Grundkurs mit homogenem Leistungsniveau und bei etwa vier Unterrichtsstunden in einem Leistungskurs.

Für die vierte Methode habe ich keine verlässlichen Angaben zum Zeitaufwand gefunden. Das Abwägen von Vor- und Nachteilen ist sicherlich auch sehr stark von dem Kurs abhängig, für den dieser Zugang in Betracht kommt.

7 Allgemeine didaktische Überlegungen

Bei der Vorbereitung dieser Einheit bin ich auf einige Hinweise eher allgemeiner Art gestoßen, die sich bei vielen Problemen der analytischen Geometrie stellen.

7.1 Das Schülerverständnis von Vektoren

Die mathematische Definition des Begriffes „Vektor“ erstaunt sogar noch viele StudentInnen:

Vektor Ein Pfeil in der Ebene oder im Raum ist gekennzeichnet durch seine Länge und seine Richtung. Die Menge *aller Pfeile* [sic!] *mit derselben Länge und derselben Richtung* bildet einen *Vektor der Ebene* bzw. *des Raumes*.

Ein Vektor kann also als eine *Pfeilklass*e, d.h. als eine unendliche Menge von gleichlangen und gleichgerichteten Pfeilen angesehen werden. [...]

Ein Vektor kann durch jeden seiner einzelnen Pfeile dargestellt werden. Die Pfeile heißen die *Vertreter* oder *Repräsentanten* des Vektors. [...]

(aus: [1, S. 485 ff.])

Man stellt bei SchülerInnen häufig fest, daß sie die Vorstellung eines Vektors mit der eines einzigen Pfeiles verknüpfen. Diese Übergeneralisierung mag dem Physikunterricht zuzuschreiben sein, in dem Kräfte als vektorielle Größen zumeist früher eingeführt werden als im Mathematikunterricht.

Umso mehr ist es notwendig, den SchülerInnen die Unterschiede zwischen Vektoren und Punkten im Raum klarzumachen. Insbesondere die Möglichkeit, die Repräsentanten von Vektoren zu verschieben, führt nicht selten zu Verständnisschwierigkeiten.

Dazu zählt auch, Begriffe wie Ortsvektor (eines Punktes), Stützvektor (einer Gerade bzw. Ebene) vektoriell zu beschreiben und dabei aber klarzumachen, daß es echte Vektoren sind. Um z.B. jeden Punkt einer Gerade im Raum zu erreichen, ist es egal, ob vom Ursprung aus zunächst das Vielfache des Richtungsvektors durchläuft und dann noch den Stützvektor vektoriell dazu addiert, oder umgekehrt.

Auch die Charakteristika bestimmter Klassen von Vektoren (Normalenvektor, Richtungsvektor) sollten den SchülerInnen immer wieder vor Augen geführt werden. So ist es z.B. für die Beschreibung einer Ebene ausreichend, einen Punkt der Ebene und deren Normalenvektor zu kennen.

Eine Idealvorstellung eines tragfähigen Gedankennetzes in der analytischen Geometrie ist, daß die SchülerInnen diese Zusammenhänge mit den dahinter stehenden verschiedenen Darstellungsarten von Geraden und Ebenen verknüpfen, statt nur die Umrechnungstechniken zu erlernen.

7.2 Bezug zur Linearen Algebra

Ein weit verbreitetes Problem in Bezug auf die Rechenvorschriften der in der Schule behandelten linearen Algebra ist, daß die Vektoren nicht als Sonderfall von Matrizen aufgefaßt werden. So findet man in vielen Schulbüchern in etwa folgende Darstellung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Diese ist aber streng genommen falsch, denn das Skalarprodukt zweier beliebiger Matrizen (Vektoren sind einspaltige Matrizen) ist nur dann definiert, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix gleich der Zeilenanzahl der rechten Matrix ist. In o.G. Fall muß der Vektor $\vec{a}$ demnach transponiert werden zu $\vec{a}^T$.

Dieses Problem taucht nicht nur beim Skalarprodukt auf, sondern durchzieht die gesamte analytische Geometrie in der Schule. Im Sinne eines möglichst konsistenten Zugangs zur Mathematik sollten meiner Meinung nach solche Fehler vermieden werden, da sie sich sehr tief in den Schülervorstellungen verankern können.

Gleiches gilt für die Beschränkung auf den $\mathbb{R}^3$. Auch hier könnte (und sollte) der Bezug zu höherdimensionalen Vektorräumen von vorneherein hergestellt und konsequent durchgehalten werden. Die nachschulische anwendungsbezogene Mathematik bewegt sich recht häufig in solchen Vektorräumen (z.B. die zeitabhängige Entwicklung einer Fräskopfbahn auf einer CNC-Maschine als Problem im $\mathbb{R}^4$).

7.3 Verwendung von Geometrie-Software

Der Einsatz von Computern im Unterricht sollte forciert werden. Bei Gebiet der analytischen Geometrie bieten mittlerweile nahezu alle gängigen Softwareprogramme für den Schuleinsatz die Möglichkeit, Schrägbilddarstellungen von dreidimensionalen Geraden live zu manipulieren.

Man kann somit den Schritt vom Raummodell auf das Tafelmodell mit Hilfe des Computers vollziehen, bei dem man die planare Darstellung des räumlichen Modells quasi mit der Maus anfassen und bewegen kann. Eine Betrachtung von allen Seiten ist somit möglich. Insbesondere die beiden Darstellungen, bei denen der Verbindungsvektor einen tatsächlich mit dem Geodreieck meßbaren rechten Winkel auf einer der beiden Geraden darstellt, dürften bei diesem Zugang von Interesse sein.

Auch die erste Methode der verschiebbaren Punkte kann man auf dem Computer oder mit guten grafikfähigen Taschenrechnern simulieren, wobei man die Längenberechnung des entstehenden Vektors durch den Rechner zunächst als Black-Box-Funktion behandeln kann.

8 Bemerkungen zur verwendeten Literatur

Ich habe hier nur ein kleines Feld der Didaktik der analytischen Geometrie beleuchten können. In vielen Fachbüchern findet man noch weitere Lösungsstrategien zur Abstandsbestimmung. Die meisten Schulen empfehlen in ihren Stoffverteilungsplänen einen Zugang, den auch das jeweils verwendete Schulbuch beschreibt. Ich habe den Abschnitt, der sich bei Hahn/Dzewas [2] als sehr weit verbreitetem Schulbuch findet, als sehr knapp und stark an mathematischer Sprache orientiert empfunden.

Geeigneter fand ich die Darstellungen von Barth und Krumbacher [3], aus dem auch das vorgestellte Beispiel entnommen ist. Die Autoren versuchen, die untersuchten Probleme sehr gut grafisch darzustellen.

Bei der Lektüre didaktischer Fachliteratur habe ich mich im Wesentlichen auf das Werk von Tietze, Klika und Wolbers [4] beschränkt. Die Autoren geben darin einen guten Überblick über didaktische Probleme der Vektorrechnung und legen dabei ein besonderes Augenmerk auf die Schülervorstellungen.

Einen sehr detaillierte Darstellung eines möglich Unterrichtscurriculums zur Analytischen Geometrie fand ich in den Studienbriefen der Universität Tübingen [5]. Die dargestellten Probleme sind schrittweise erklärt. Leider ist die didaktische Begründung meist nicht sehr ausführlich.

Da es sich bei der Abstandbestimmung windschiefer Geraden um ein Standardproblem handelt, findet sich nahezu in jedem Schulbuch der Analytischen Geometrie ein entsprechenden Abschnitt. Eine Liste anzugeben halte ich für nicht sinnvoll, möchte aber empfehlen, einfach mal verschiedene Schulbücher in diesem Punkt zu vergleichen.

Literatur

- [1] Prof. Dr. Harald Scheid (Hg.). *Schüler-Duden Die Mathematik I*. Dudenverlag, Mannheim. 5. neu bearb. Auflage 1990; S. 465 ff.
- [2] Hahn / Dzwewas. *Mathematik Lineare Algebra/Analytische Geometrie*. Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig. 1. Auflage 1992; S. 120
Signatur Bereichsbibliothek Wechloy: mat 926.33 LL 3715,1996
- [3] Elisabeth und Friedrich Barth, Gert Krumbacher. *Anschauliche analytische Geometrie*. Reihe: Ehrenwirth Oldenbourg. Verlag R. Oldenbourg, München. 2. Korrigierte Auflage 1997; S. 277 ff.
Signatur Bereichsbibliothek Wechloy: mat 926.37 LL 3759,2
- [4] Uwe Peter Tietze, Manfred Klika, Hans Wolpers (Hrsg.). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 2: *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig. 3. Auflage 2000; S. 134 - 148, 159 - 173 und 185 - 197
Signatur Bereichsbibliothek Wechloy: mat 926.24 CD 8898-2
- [5] Peter Herfort, Gisela Reinhardt, Wolfgang Schuster. *Mathematik – Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer in der Sekundarstufe II*. MG3: *Analytische Geometrie*. Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen. 1984; S. 55 - 70 und 124 - 127
Signatur Bereichsbibliothek Wechloy: mat 926.24 BL 7696 a-3