Zusammenfassung zum Seminar Vollständige Induktion

Jens Bödeker
jens.boedeker@mail.uni-oldenburg.de

Lars Hoegen
studium@hoegen.info

18. Juni 2003

1 Deduktion und Induktion

Die vollständige Induktion beinhaltet meist Schlüsse, die auf Deduktion und Induktion beruhen. Daher hier zunächst ein kurzer Rückblick.

Dekuktion – Demonstratives Schließen

- durch logische Gründe ein Urteil demonstrieren (zeigen, d.h. Beweisen anhand von vorhandenen Definitionen
- Deduktion (lat. „Herabführung“) auch deshalb, weil man neue Aussagen aus schon vorhandenen, allgemeineren Aussagen herleitet

→ grob gesagt: Der Schluss vom dem Allgemeinen auf das Besondere

Induktion – plausibles Schließen

- die aus Beobachtungen erwachsene Vermutung zu einer neuen Aussage formen
- von Beobachtungen auf Gesetzmäßigkeiten schließen
- Beurteilung von Sachverhalten durch empirische (mit den Sinnen wahrnehmbare) Gründe
- die Aussagen bergen meist ein hohes Maß an Wahrscheinlichkeit in sich → keine vollständige Gewissheit

→ grob gesagt: Der Schluss von dem Besonderen auf das Allgemeine

2 Merkmale der vollständigen Induktion

Eine vollständige Induktion beruht auf einer Induktion. Für den Beweischarakter der vollständigen Induktion sind zwei Merkmale von Belang:

1. **Induktionsanfang** oder **Verankerung**

   Im Induktionsanfang wird eine durch Induktion hergeleitete Aussage betrachtet, zu der man durch eine Analogiebeobachtung (beim Ausprobieren verschiedener Zahlen) gelangt ist. Man prüft diese Aussage deduktiv für eine spezielle (möglichst kleine) natürliche Zahl auf ihren Wahrheitsgehalt.

2. **Induktionsschritt** oder **Vererbung**

   Im Induktionsschritt folgt dann der ebenfalls deduktive Beweis der Behauptung, daß aus der Gültigkeit der Behauptung für n auch die Richtigkeit für n+1 folgt (mehr muß nicht gezeigt werden!). Aus diesem Grunde wird diese Methode gelegentlich „Schluss von n auf n+1“ genannt.

Insgesamt lässt sich sagen, dass mit dieser Beweismethode eine Induktionsaussage deduktiv bewiesen wird; die Induktion wird (mathematisch) vervollständigt.

Man kann das Beweisprinzip am besten am *Dominomodell* verdeutlichen: Wenn man Dominosteine derart in einer Reihe aufstellt, daß das Umfallen eines beliebigen Spielsteines s zur Folge hat, daß der nachfolgende Stein $s+1$ auch umfällt (Vererbung), so kann man durch Umstoßen des ersten Steines (Verankerung) *alle* Steine zum Umfallen bringen.

3 Schwierigkeiten bei der vollständigen Induktion

„Die vollständige Induktion ist der Nachweis, daß die Aussage für $n+1$ gilt “

Diese Aussage ist *falsch*, denn eine vollständige Induktion ist nur dann vollständig, wenn sowohl Induktionsanfang als auch Induktionsschritt gezeigt sind (denn sonst würden nicht alle Dominosteine umfallen).

„Die Aussage gelte für ein beliebiges n“

In vielen Beweisen durch vollständige Induktion findet man zwischen Induktionsanfang und Induktionsschritt häufig die Annahme, daß die im Induktionsanfang betrachtete Aussage für ein beliebiges n gelte. Diese ist für den Beweis nicht notwendig, da man mit dem Induktionsanfang schon die Basis für den Beweis gelegt hat.

„Die vollständige Induktion ist nur auf Probleme anwendbar, die natürliche Zahlen betrachten“

Der Beweischarakter der vollständigen Induktion liegt in der Anordnung der natürlichen Zahlen begründet. Diese beruhen auf einem System von Axiomen (d.h. nicht beweisbarer Forderungen), die vom Mathematiker Peano festgelegt wurden:

- P1 Null ist eine natürliche Zahl.
- P2 Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist auch eine natürliche Zahl.
- P3 Null kann nicht auf eine natürliche Zahl folgen.
- P4 Zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger, oder: Wenn auf zwei Zahlen dieselbe Zahl folgt, so sind sie identisch.
- P5 Wenn eine Menge die Zahl Null enthält, und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält sie jede natürliche Zahl.

Das fünfte Axiom wird auch *Induktionsaxiom* genannt, denn das Prinzip der vollständigen Induktion beruht auf diesem. Der Zusammenhang wird klar, wenn man es ein wenig umformuliert, indem man sich nicht auf eine Menge bezieht, die irgendwelche Zahlen enthält, sondern auf eine Eigenschaft, die auf irgendwelche Zahlen zutrifft:

> Wenn Null eine bestimmte Eigenschaft hat, und wenn jeder Nachfolger einer natürlichen Zahl diese Eigenschaft besitzt, sofern die natürliche Zahl selbst die Eigenschaft hat, dann haben alle natürlichen Zahlen diese betreffende Eigenschaft.

Für die vollständigen Induktion als Beweisverfahren ist es egal, ob man den Induktionsanfang bei 1 setzt, denn die Vererbung ist axiomatisch in den natürlichen Zahlen enthalten.

4 Beispielaufgaben

Alle Aufgaben sicd mit vollständiger Induktion lösbar. Wir möchten dazu auffordern, sich bei der Lösung der letzten Aufgaben selber zu beobachten und herauszufinden, wo Induktion und Deduktion verwendet werden und wo die vollständige Induktion beginnt.

Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist eine Quadratzahl

Eine Niederschrift der in der Verantstaltung gezeigten Beispielaufgabe mit Kommentaren kann per Mail bei `studium@hoegen.info` angefordert werden.

Das Dukatenproblem

Es soll bewiesen werden, dass man allein mit 5-Dukaten-Münzen (Fünfern) und 3-Dukaten-Münzen (Dreiern) jeden ganzzahligen Dukatenbetrag bilden kann, der größer als 7 Dukaten ist.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang 8 Dukaten = 1 Fünfer + 1 Dreier

Induktionsschritt Angenommen, ein Betrag von m Dukaten sei aus Fünfern bzw. Dreiern gebildet. Man kann zwei Fälle unterscheiden:

1. m enthält wenigstens einen Fünfer. Ersetzt man einen Fünfer durch zwei Dreier, so hat man einen Betrag von m+1 Dukaten.
2. m besteht nur aus Dreiern. ersetzt man drei Dreier durch zwei Fünfer, so hat man einen Betrag von m+1 Dukaten.

Damit ist bewiesen, daß sich jeder ganzzahlige Dukatenbetrag, der größer als 7 Dukaten ist, nur mit Fünfern und Dreiern bilden läßt.

Kreislinie

Gegeben sei eine Kreislinie, auf der n Punkte (P_1 bis P_n) verteilt sind. Jeder dieser Punkte ist mit allen anderen durch eine Strecke verbunden. Es ist zu beweisen, daß die Anzahl dieser Verbindungsstrecken gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

LUCAS' Turmproblem

Auf der Welatausstellung 1889 in Paris hatte der französische Mathematiker LUCAS einige Spiele ausgestellt, darunter auch das Turmspiel:

> Auf einem von drei Stiften sind n kreisförmige Scheiben der Größe nach gestalpelt. Dieser Scheibenturm soll auf einen anderen Stift umgeschichtet werden. Dabei müssen die Scheiben einzeln umgelegt werden. Nie darf eine größere Scheibe auf eine kleinere geraten. Die minimale Anzahl $M(n)$ der Umlegungen ist gesucht.

Behauptung: $M(n) = 2^n - 1$. Stimmt das?

Schachturnier

Wie viele Spiele werden bei einem Schachturnier ausgetragen, wenn n Spieler teilnehmen und jeder Spiele genau einmal gegen jeden anderen spielt?

Literatur

[1] Georg Polya. *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Franke Verlag, Bern, München, 2. Auflage 1967.

[2] Prof. Roland Stowasser and Benno Mohry. *Rekursive Verfahren.* Schroedel Verlag KG, Hannover, Dortmund, Darmstadt, Berlin, 1978.

[3] Friedrich Waismann. *Einführung in das mathematische Denken.* Wissenschaftliche Reihe. Deutscher Taschenbuchverlag, München, 3. Auflage 1970.